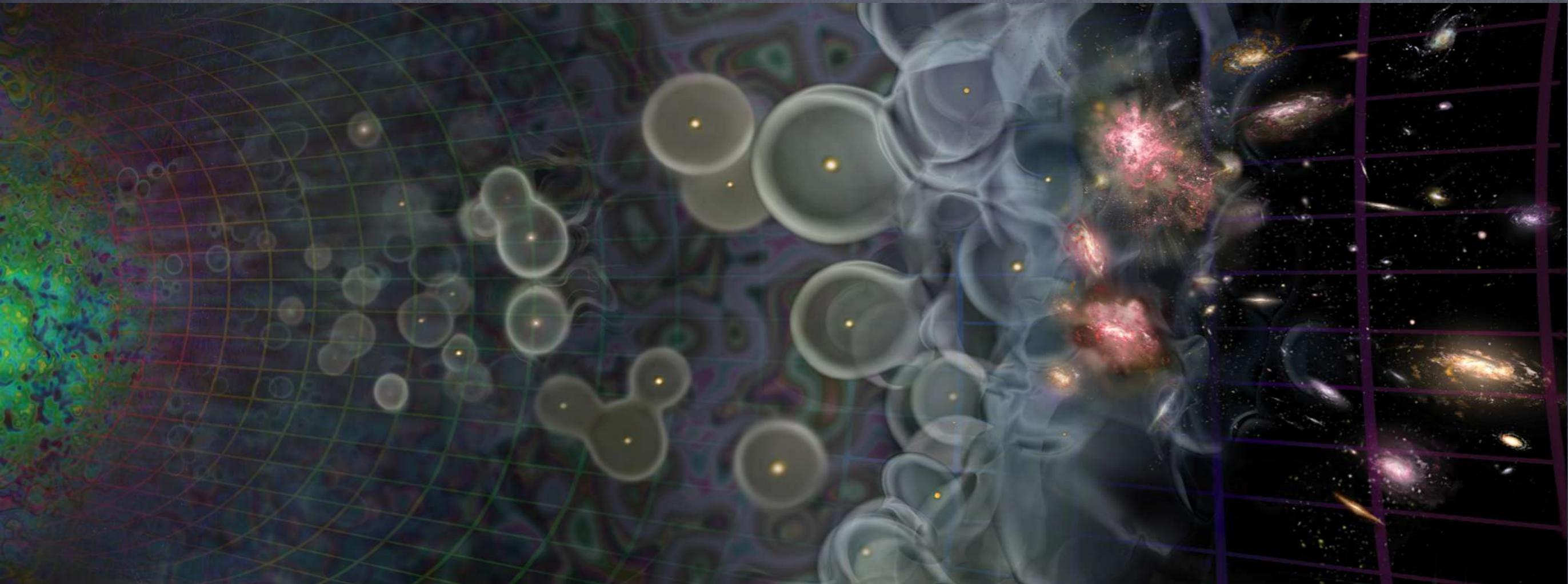


Física II - aula extra:



Um pouco de
Relatividade Geral

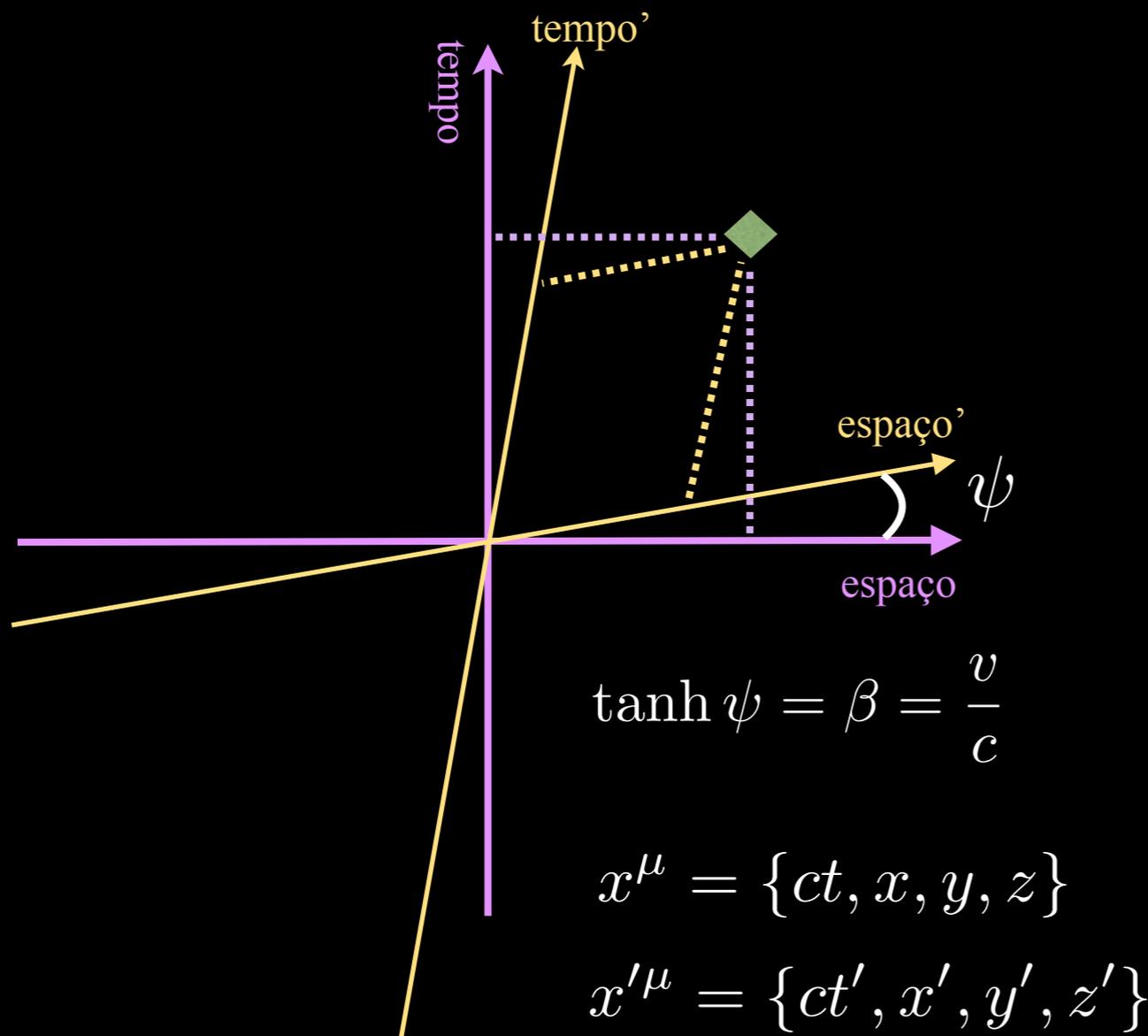
- Relatividade Restrita (revisão rápida)
- O Princípio da Equivalência
- Coordenadas generalizadas e a métrica
- A Relatividade Geral de Einstein
- Buracos negros

Bibliografia adicional:

C. Boyer, "A History of Mathematics"

H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski & H. Weyl,
"The Principle of Relativity" ("O Princípio da Relatividade")

Relatividade especial: o espaço-tempo de Minkowski



$\beta = v/c,$
 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

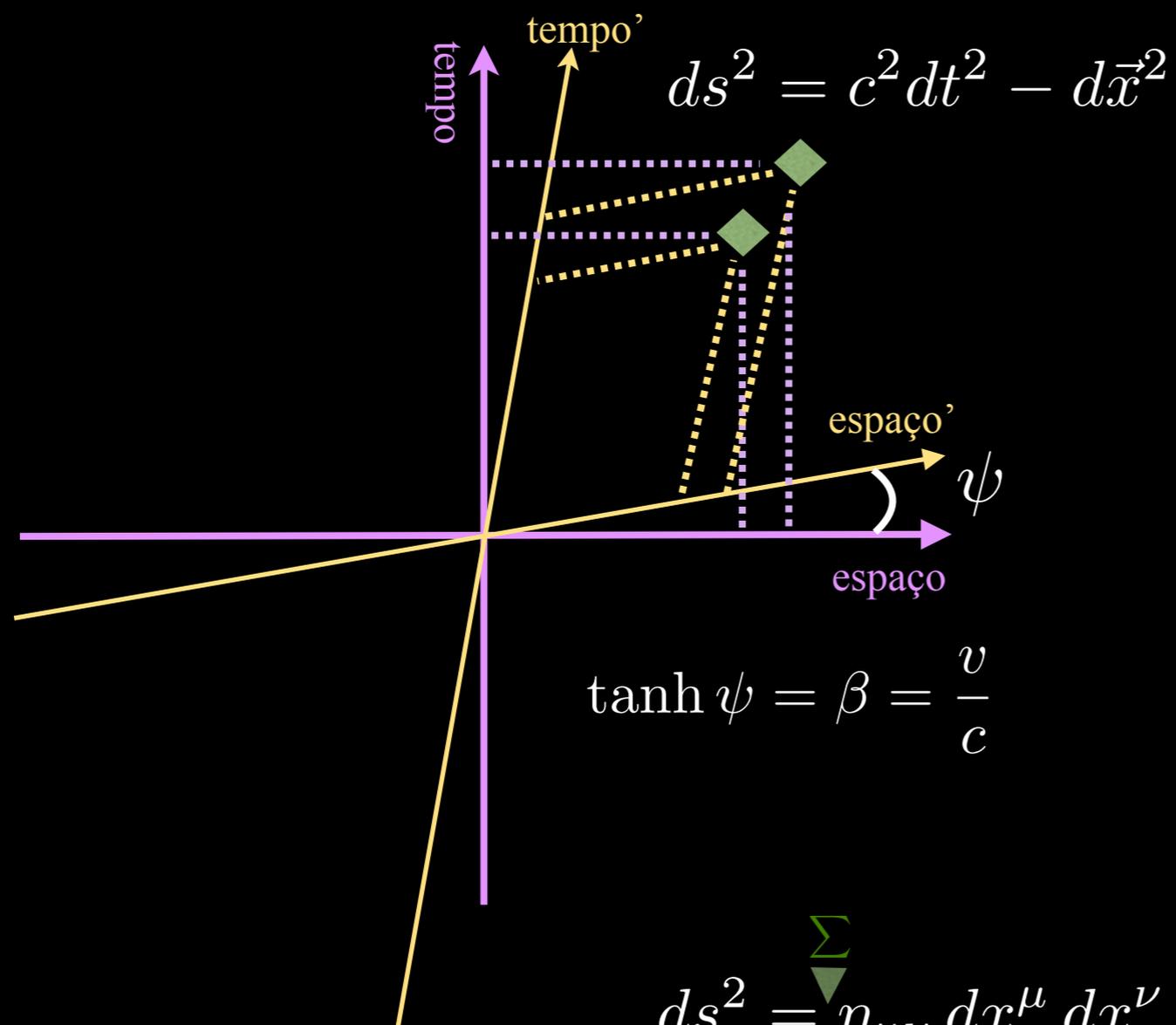
$$\begin{aligned}
 ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\
 x' &= \gamma(x - \beta ct) \\
 y' &= y \\
 z' &= z
 \end{aligned}$$

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

Notação de Einstein

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

Relatividade especial: o espaço-tempo de Minkowski



$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

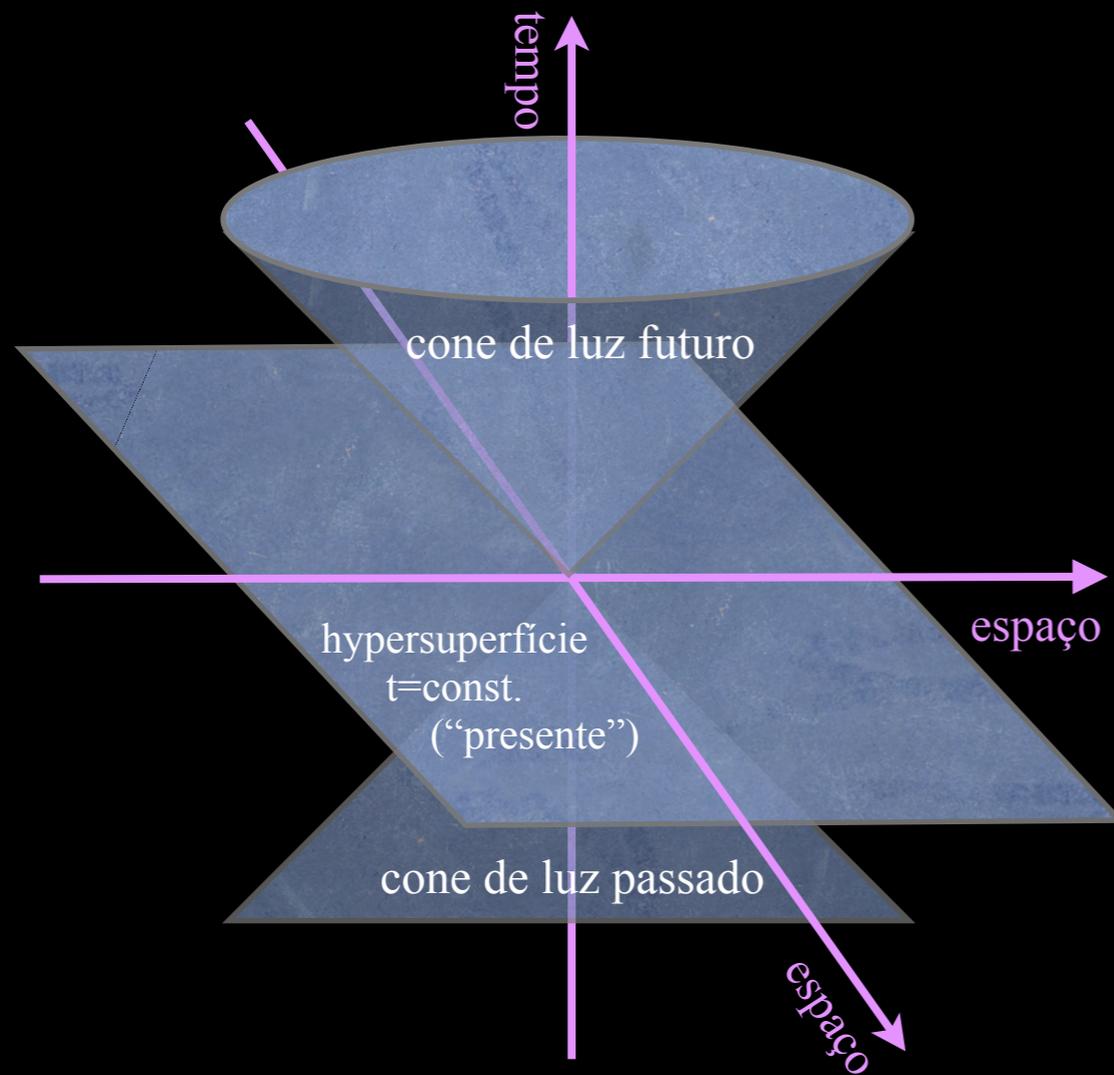
$$ds^2 = \sum \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$$

Invariância de Lorentz:

$$ds^2 = ds'^2$$

Relatividade especial: o objeto fundamental é o cone de luz



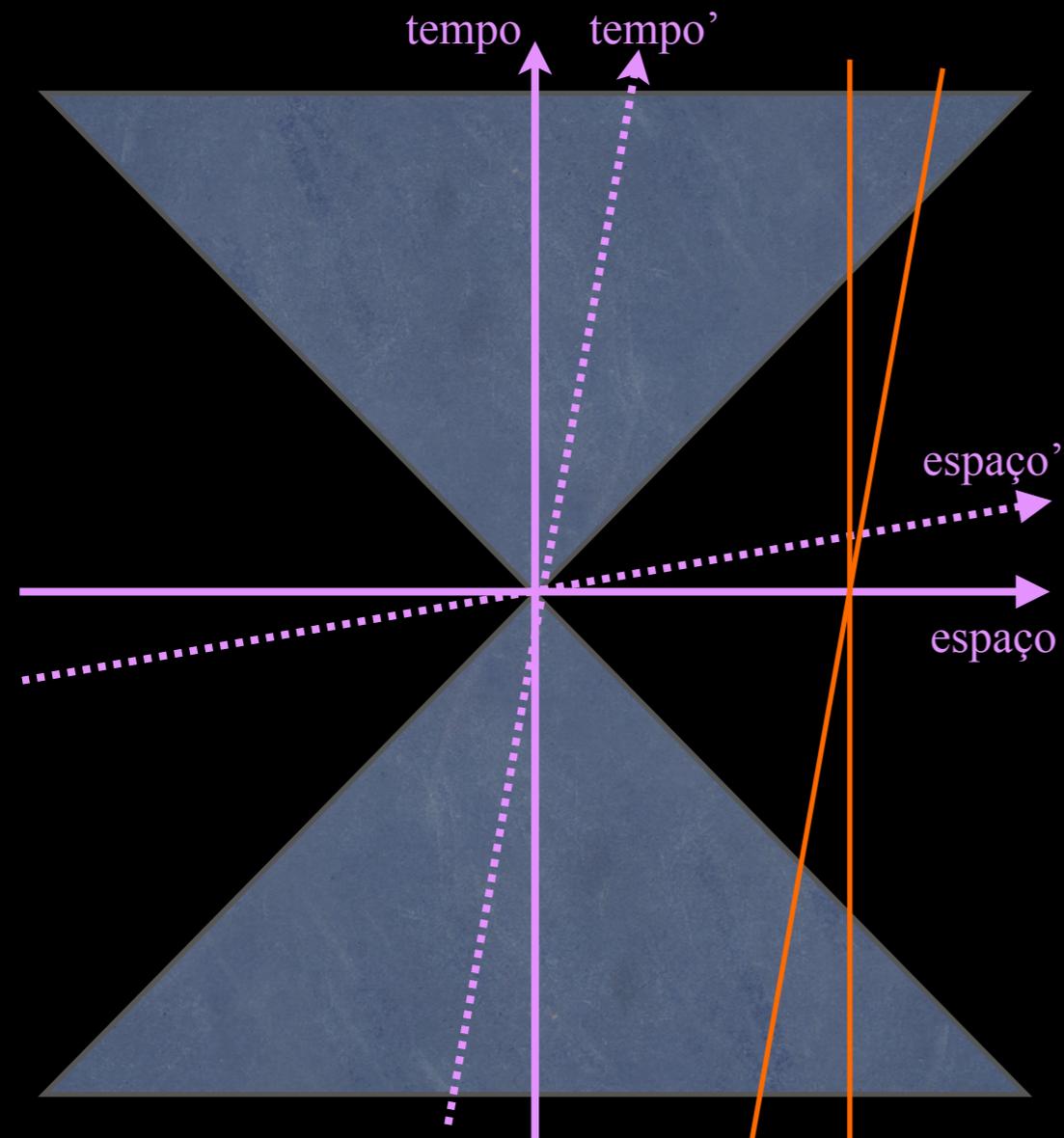
Cone de luz:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Luz:

$$|\vec{v}| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| = c$$

Relatividade especial: invariância do cone de luz sob "boosts"



$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v^i}{c} \\ -\gamma \frac{v_j}{c} & \delta_{ij} + (\gamma - 1) \frac{v^i v_j}{v^2} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^\mu_\alpha(v) \Lambda^\alpha_\nu(-v) = \delta^\mu_\nu$$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = 0$, $dx'/dt' = -v$

Linha de mundo de observador
com $dx/dt = +v$, $dx'/dt' = 0$

$$\frac{dx'^\mu}{dx^\nu} = \Lambda^\mu_\nu$$

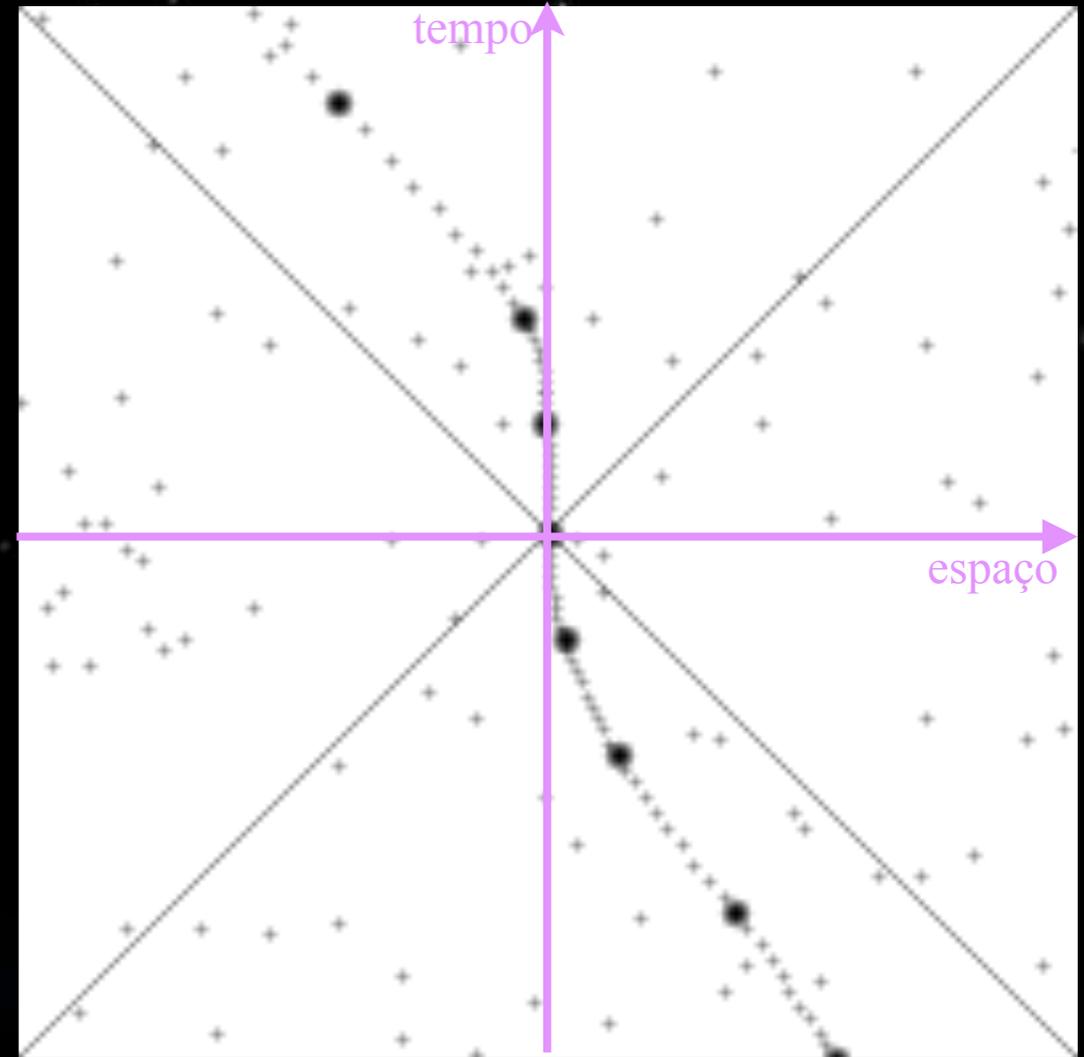
Física II - aula extra: Relatividade Geral

O princípio de equivalência de Einstein (1915!) permite tratar referenciais acelerados \Rightarrow covariância sob transf. de coordenadas generalizadas



Observador
estacionário num
campo gravitacional

Observador acelerado
(queda livre)
=
observador inercial



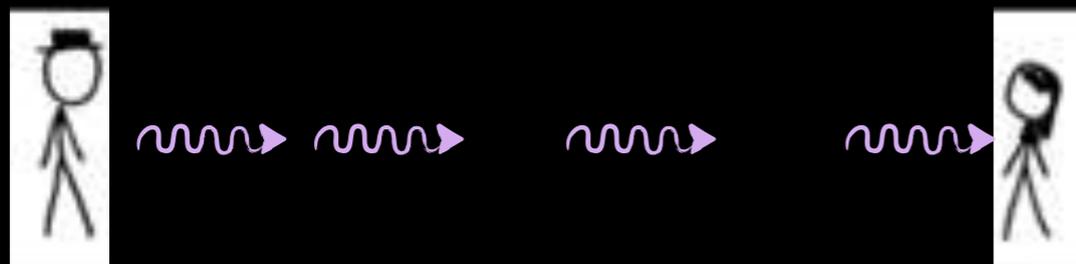
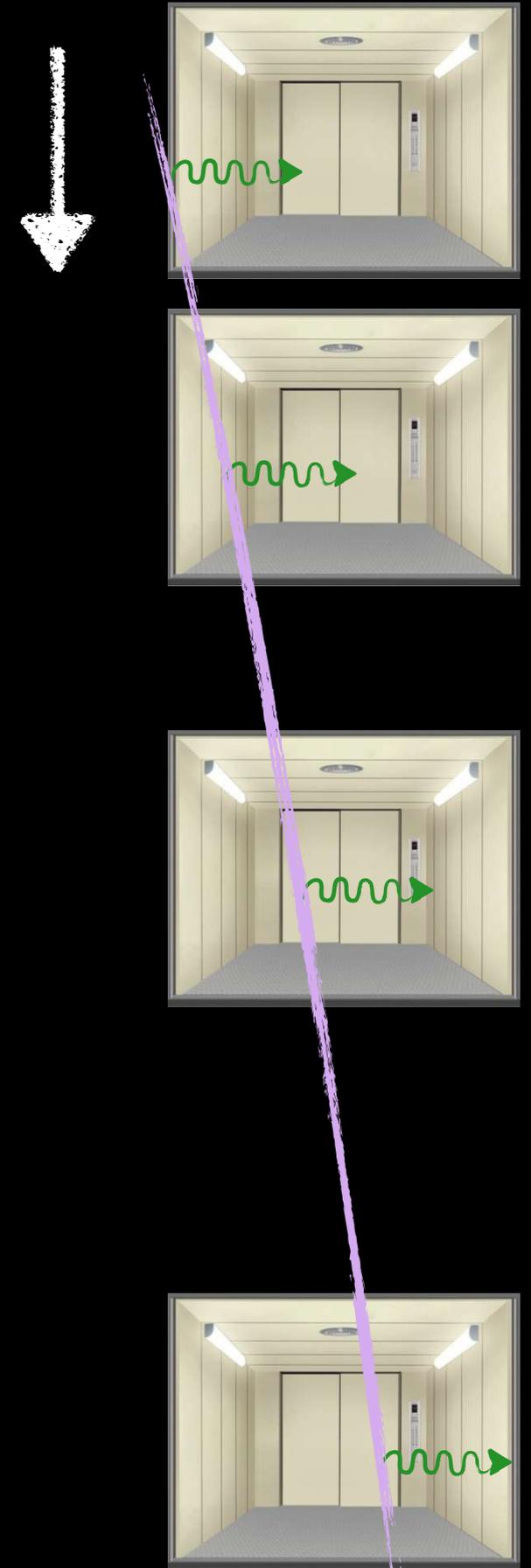
$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$$

$$\Rightarrow ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

métrica: geometria do
espaço-tempo

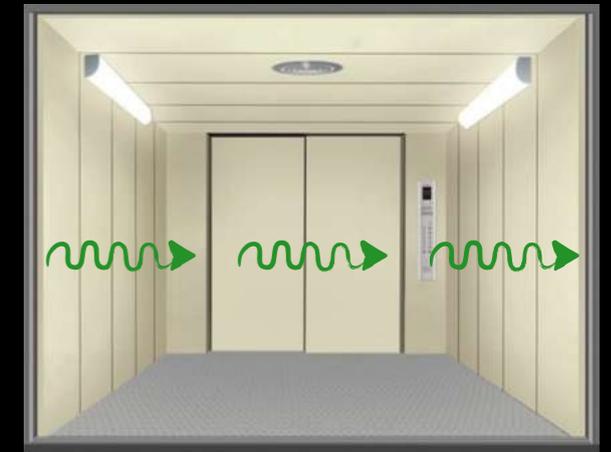
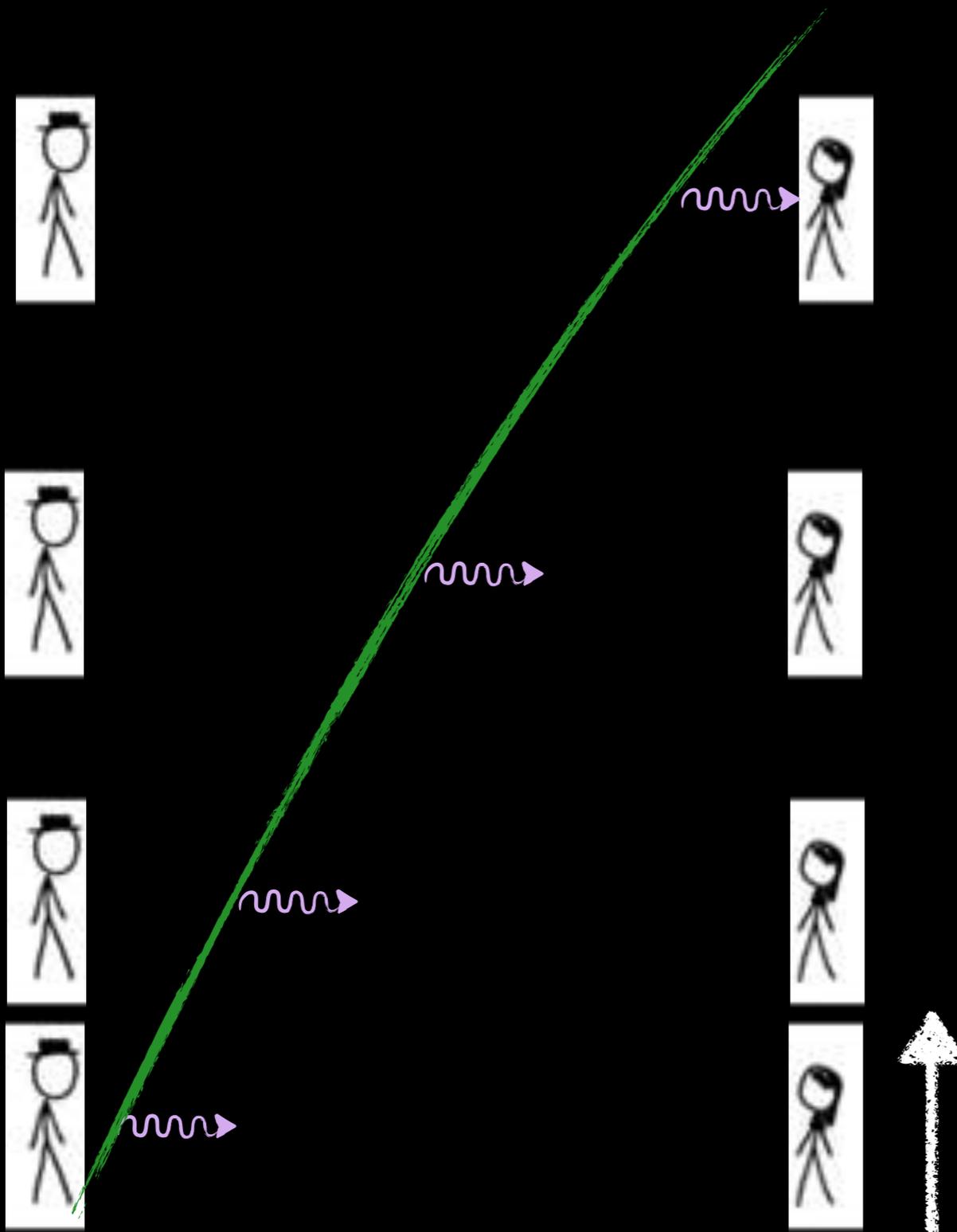
Física II - aula extra: Relatividade Geral

O elevador de Einstein visto de um observador parado na Terra:



Física II - aula extra: Relatividade Geral

O cara parado na Terra, visto desde o elevador de Einstein:



Mas... e agora? E o cone de luz?

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \Rightarrow 0$$

Pelo **Princípio de Fermat**, a luz tem que percorrer o caminho que **minimiza o tempo** de viagem.

Mas como o menor tempo de viagem da luz pode ser uma **curva**, e não uma **reta**?

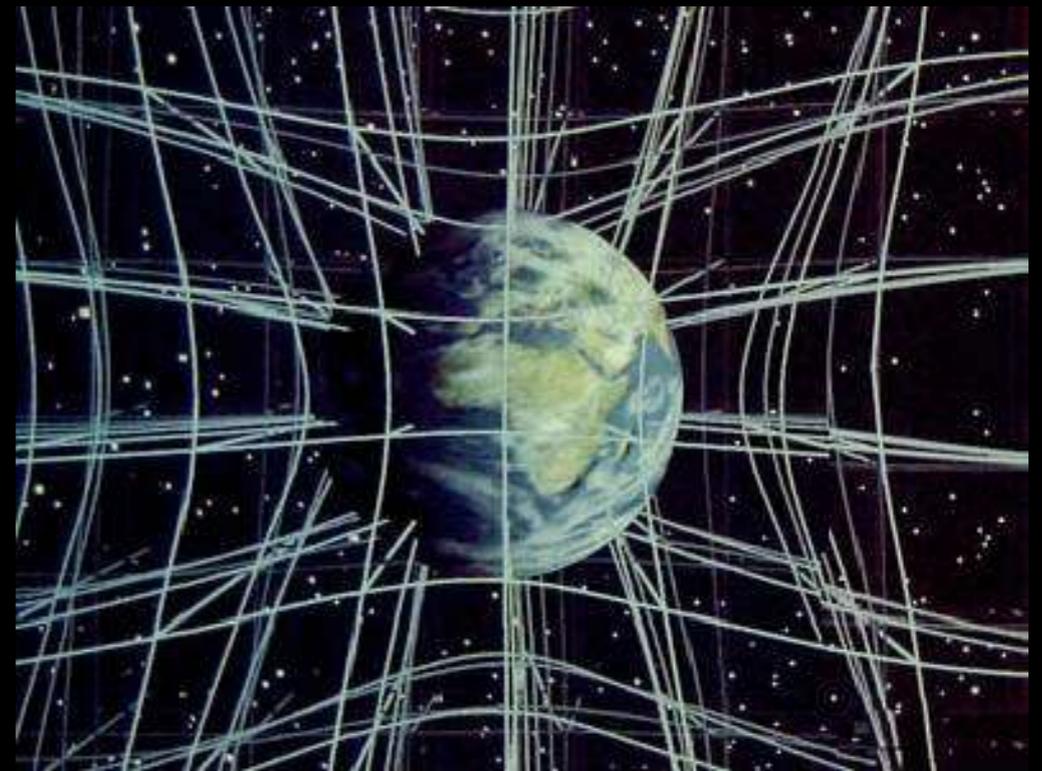
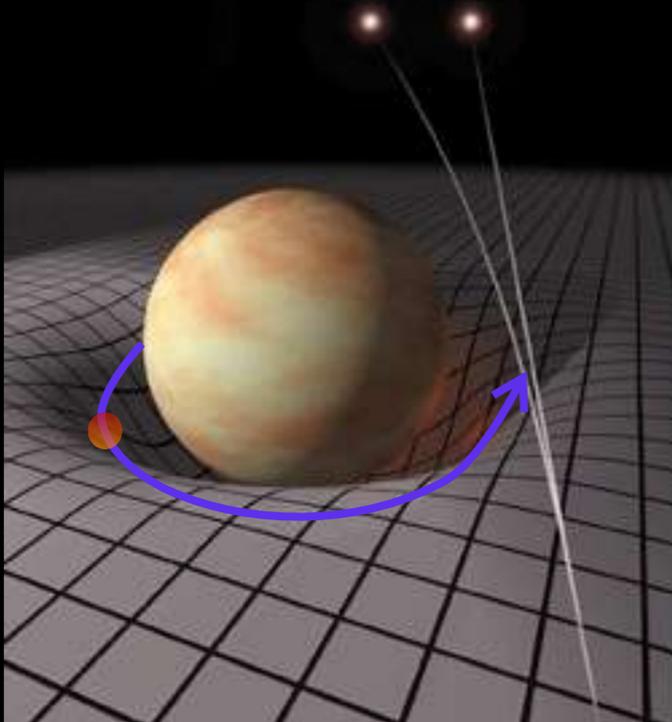
A resposta é que precisamos pensar em **espaços curvos** - ou melhor, **espaços-tempo curvos**!

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Física II - aula extra: Relatividade Geral

Nas teorias "covariantes" da gravidade (p. ex., a Relatividade Geral), a **gravidade** é uma manifestação da **curvatura do espaço-tempo**

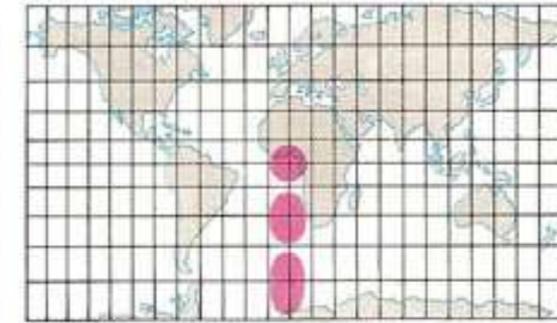
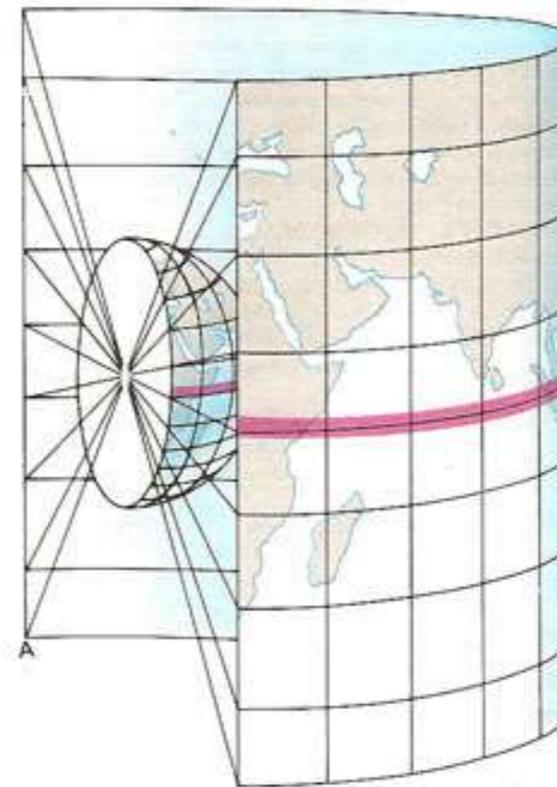
Nessas teorias, a **métrica** do espaço-tempo (i.e., sua **geometria**) tem dois papéis:
ela **determina** a trajetória da matéria... ..e é **curvada** pela matéria



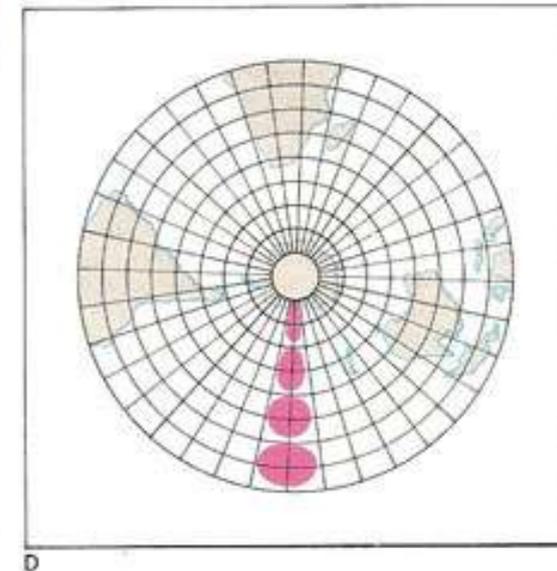
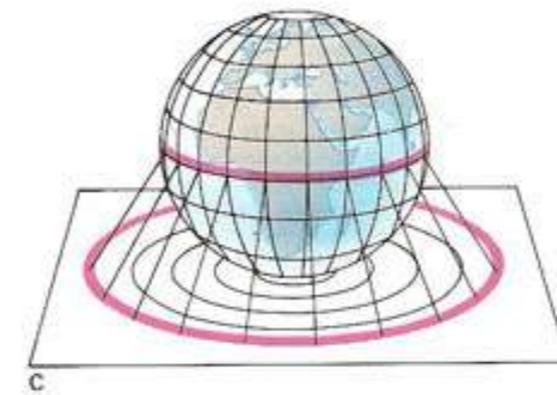
- O que significa uma "geometria" do espaço-tempo?
- O que determina essa geometria?
- Como podemos fazer medidas que testam essa teoria?

Física II - aula extra: Relatividade Geral

Um exercício simples:
a esfera e suas projeções

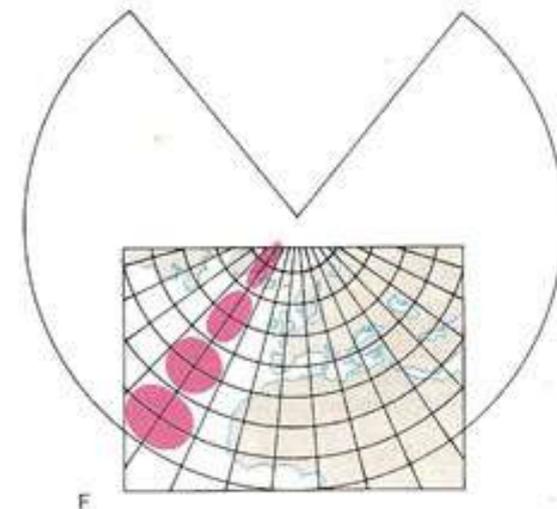
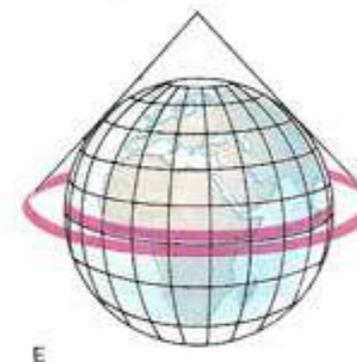


A,B: Mercator



C,D: Azimutal

E,F: Cônica



Física II - aula extra: Relatividade Geral

Qual a rota mais rápida de São Paulo a Paris?

E de São Paulo a Tokyo?...



Física II - aula extra: Relatividade Geral

Esta é a rota mais rápida de São Paulo a Tokyo!



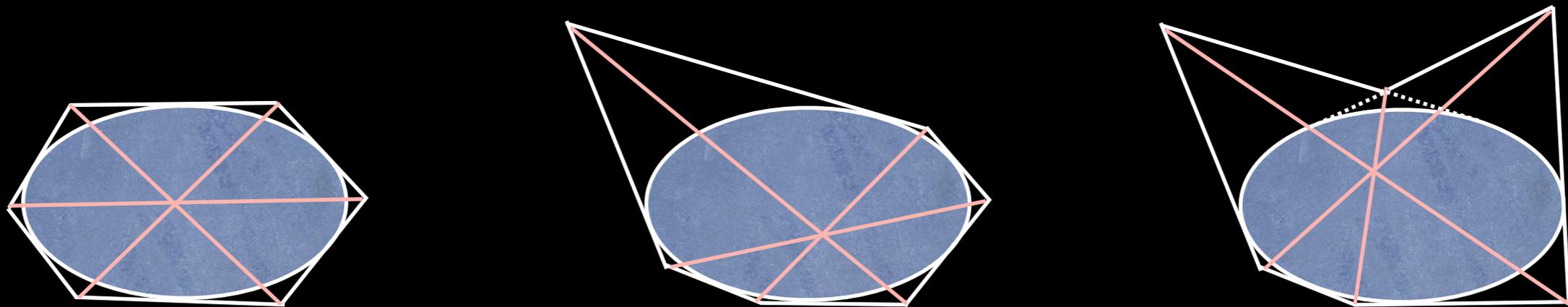
Física II - aula extra: Relatividade Geral

Preâmbulo: A pré-história da Geometria Diferencial

Após Newton, a Física se concentrou na Mecânica, Óptica, Termodinâmica; os matemáticos ficaram obcecados com a Análise; a Geometria era considerada assunto de 2ª classe

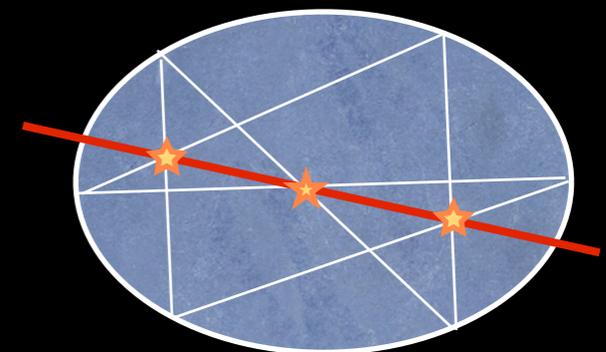
O retorno da Geometria iniciou c. 1806, quando **Charles J. Brianchon** (que tinha 21 anos) e **Gaspard Monge** ("Comte de Péluse") provaram o seguinte teorema:

Os seis lados de um hexágono circunscrevem uma seção cônica SSE as três linhas comuns aos três pares de vértices opostos têm um ponto em comum



Isso foi logo reconhecido como o **dual** (ou "dual projetivo") do teorema de **Pascal** de 1639 (demonstrado quando Pascal tinha 16 anos!), que afirma o seguinte:

Se um hexágono arbitrário está inscrito numa seção cônica, então os três pares das continuações de lados opostos se encontram em pontos numa linha reta.



Física II - aula extra: Relatividade Geral

Já esses resultados inspiraram Karl Feuerbach, em 1822, a (re-)descobrir as propriedades do círculo de 9 pontos

(Brianchon chegou antes...)

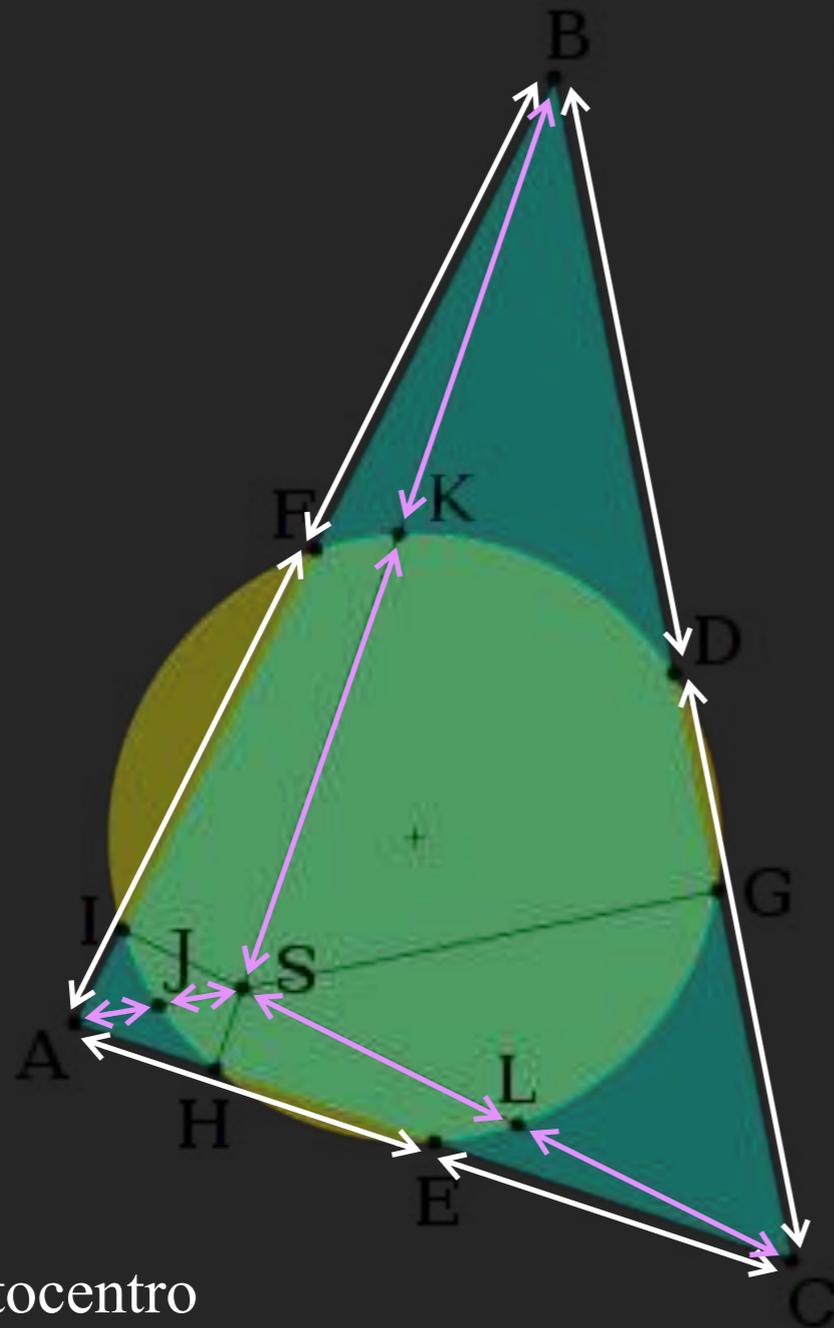


... e provar o Teorema de Feuerbach:

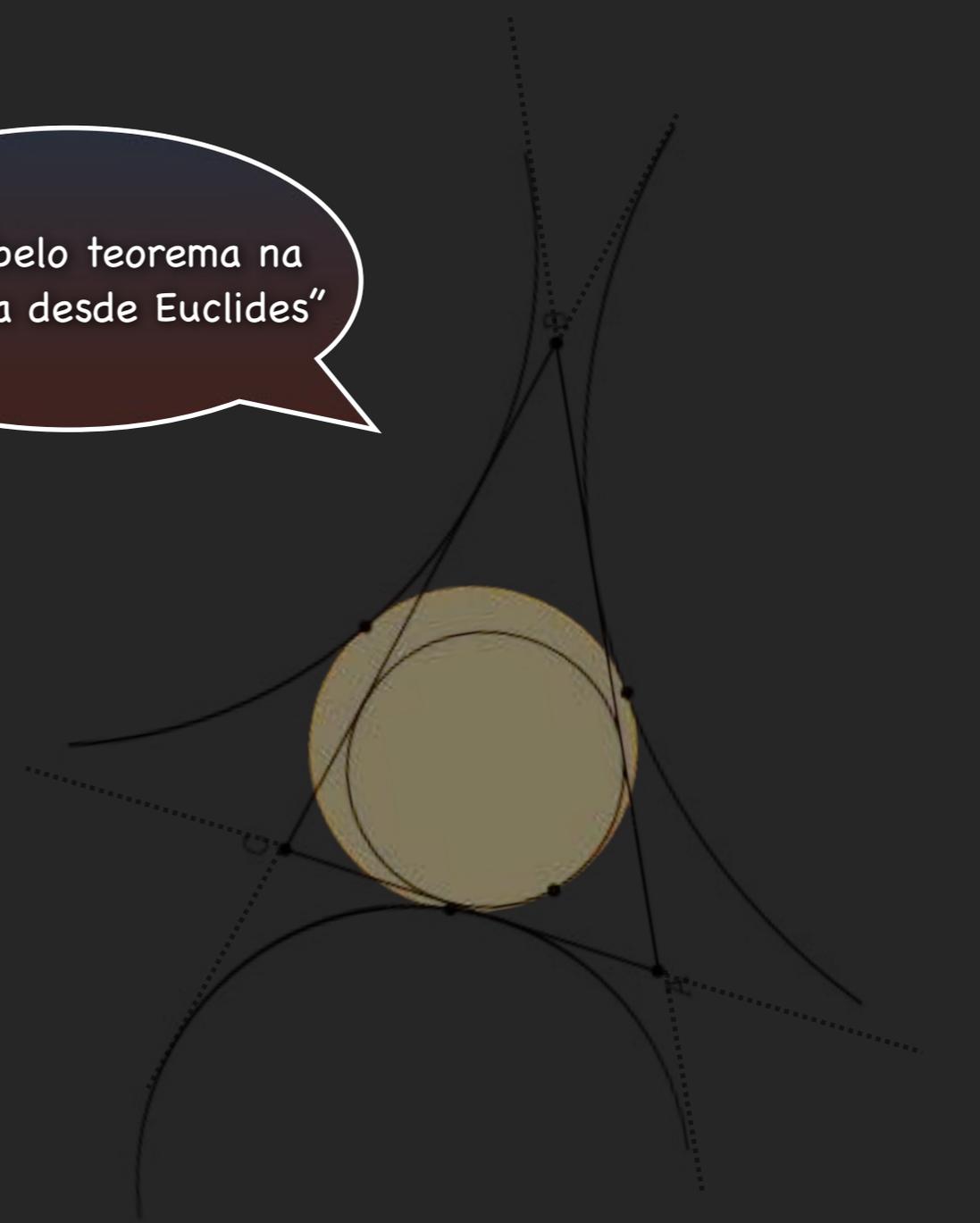
$AE=EC$
 $CD=DB$
 $BF=FA$

$SL=LC$
 $SK=KB$
 $SJ=JA$

S: Ortocentro
AG, BH, CI: Altitudes



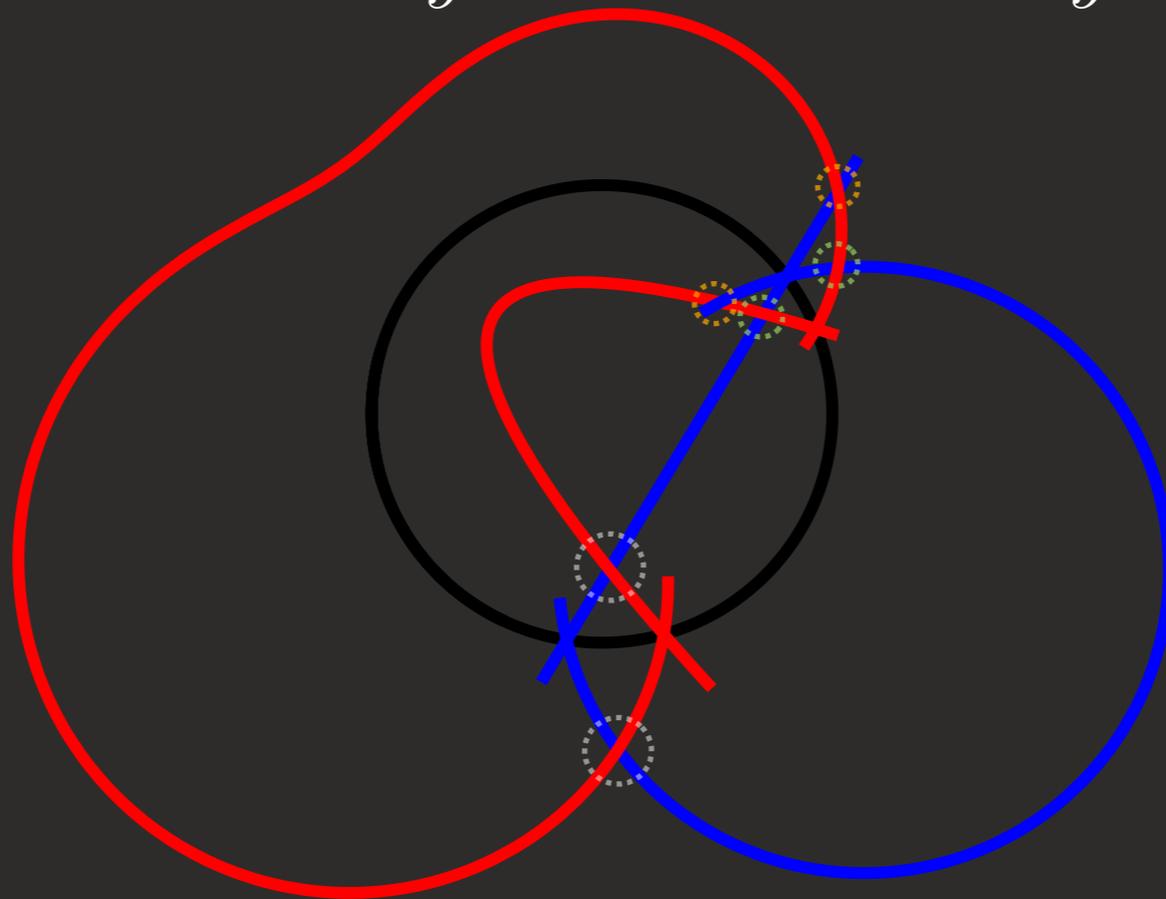
"o mais belo teorema na Geometria desde Euclides"



Física II - aula extra: Relatividade Geral

... que, por sua vez, levou **Jakob Steiner** (Steiner/Geometria :: Gauss/Análise) a descobrir, c. 1824, as leis da "geometria inversiva": a todo ponto dentro (fora) de um círculo, corresponde outro ponto, fora (dentro) dele, dado pela transformação (para raio unitário):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$$



Essa é uma **transformação conforme** - que preserva os **ângulos** de linhas que cruzam.
(Essas transformações foram depois re-descobertas por outros, incluindo **Lord Kelvin**, no contexto da Eletrostática - no **método das imagens**.)

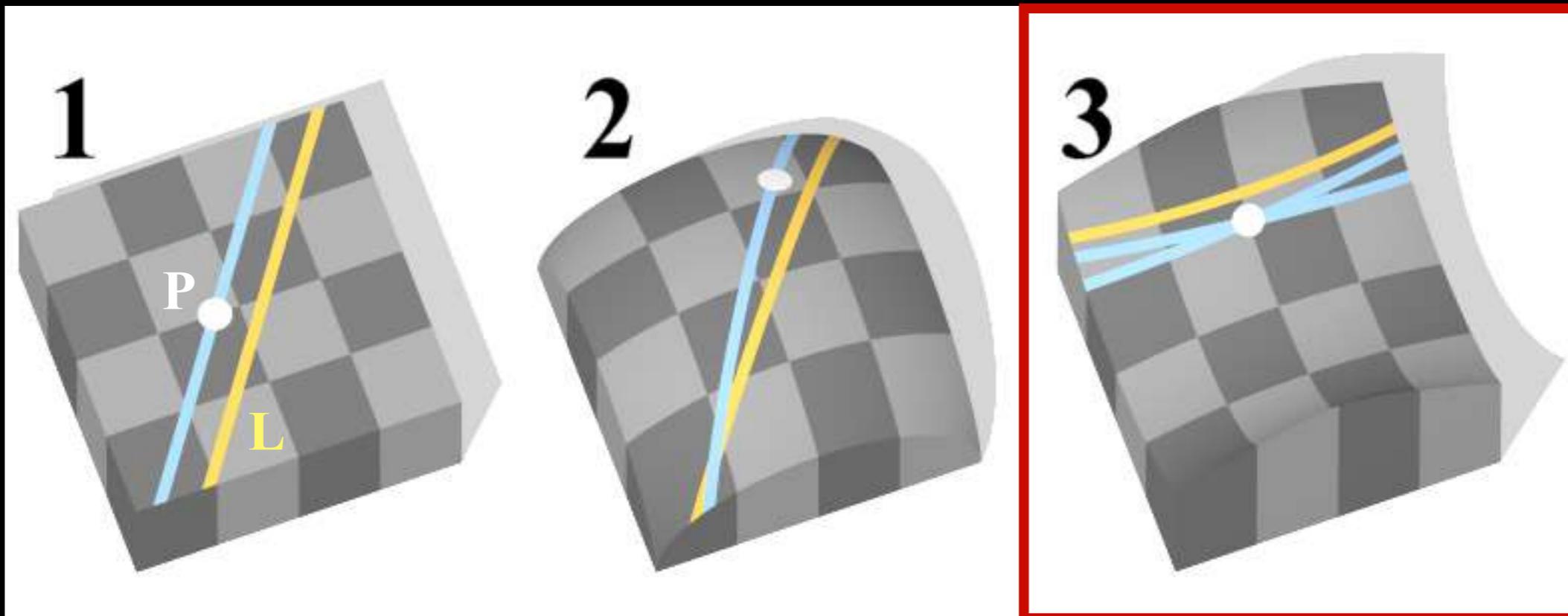
Física II - aula extra: Relatividade Geral

O estudo de transformação de coordenadas e de dualidades (e.g., pontos/linhas) reacendeu o interesse na Geometria a partir do Séc. XIX.

Em ~1826 Nicolai Lobachevski (e, independentemente, C. F. Gauss e János Bolyai) miraram num dos pilares da Geometria Euclideana: o "postulado das paralelas":

dada uma linha L e um ponto P , pode existir apenas uma linha que passa por P e não cruza L .

Lobachevski mostrou que isso era falso, construindo espaços "curvos", infinitos, em 2D, (que ele chamava "geometrias imaginárias") onde existem muitas linhas por P :



1. Plano, infinito (Euclidean)

2. Curvo, finito (fechado/elíptico)

3. Curvo, infinito (aberto/hiperbólico)



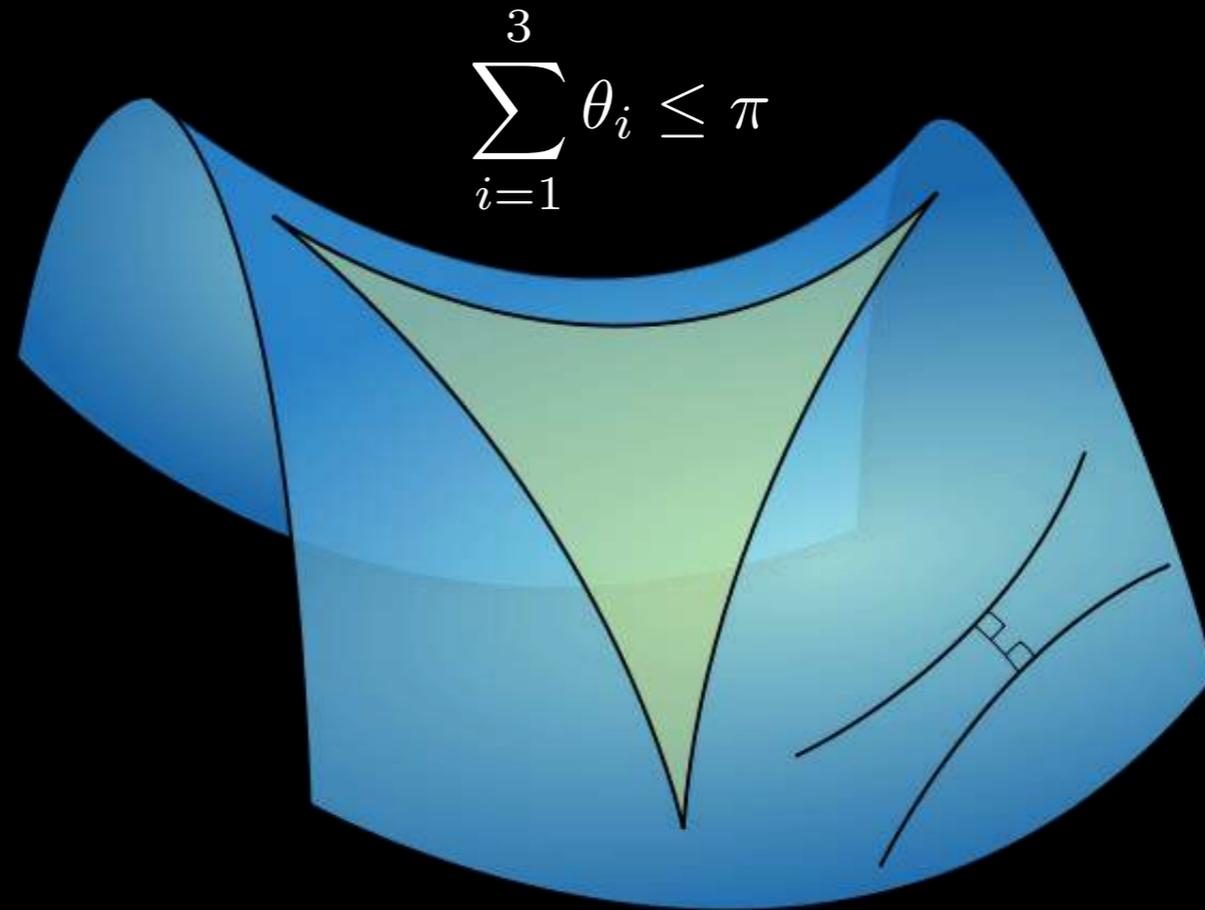
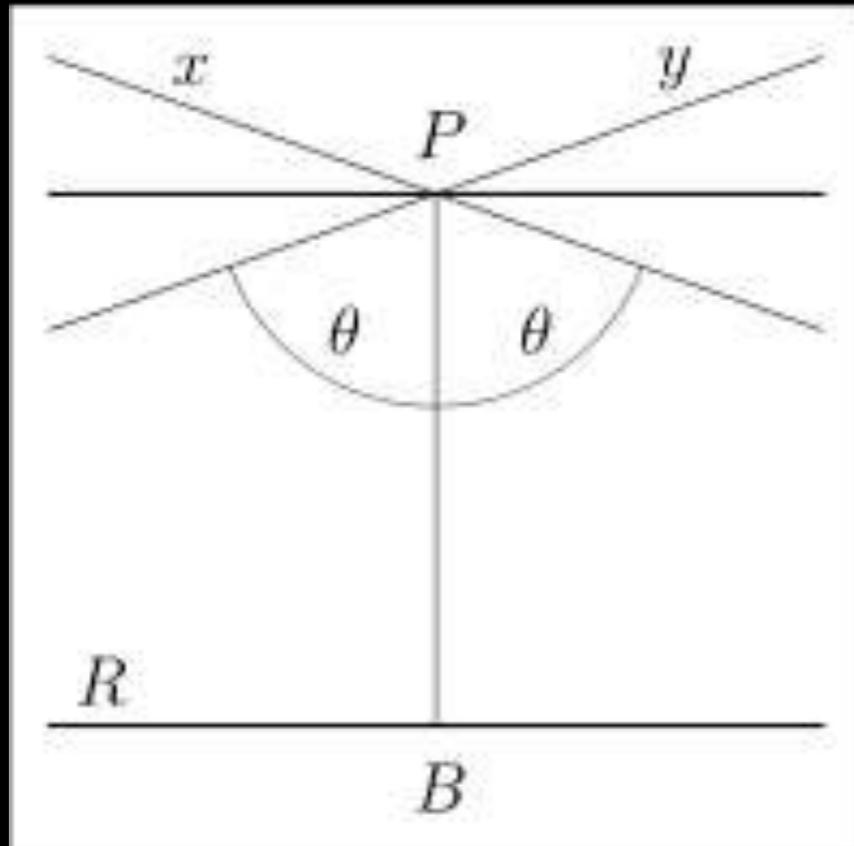
Espaço de Gauss-Lobachevski-Bolyai

Física II - aula extra: Relatividade Geral

Geometria hiperbólica (ou Geometria de Bolyai-Lobachevsky)

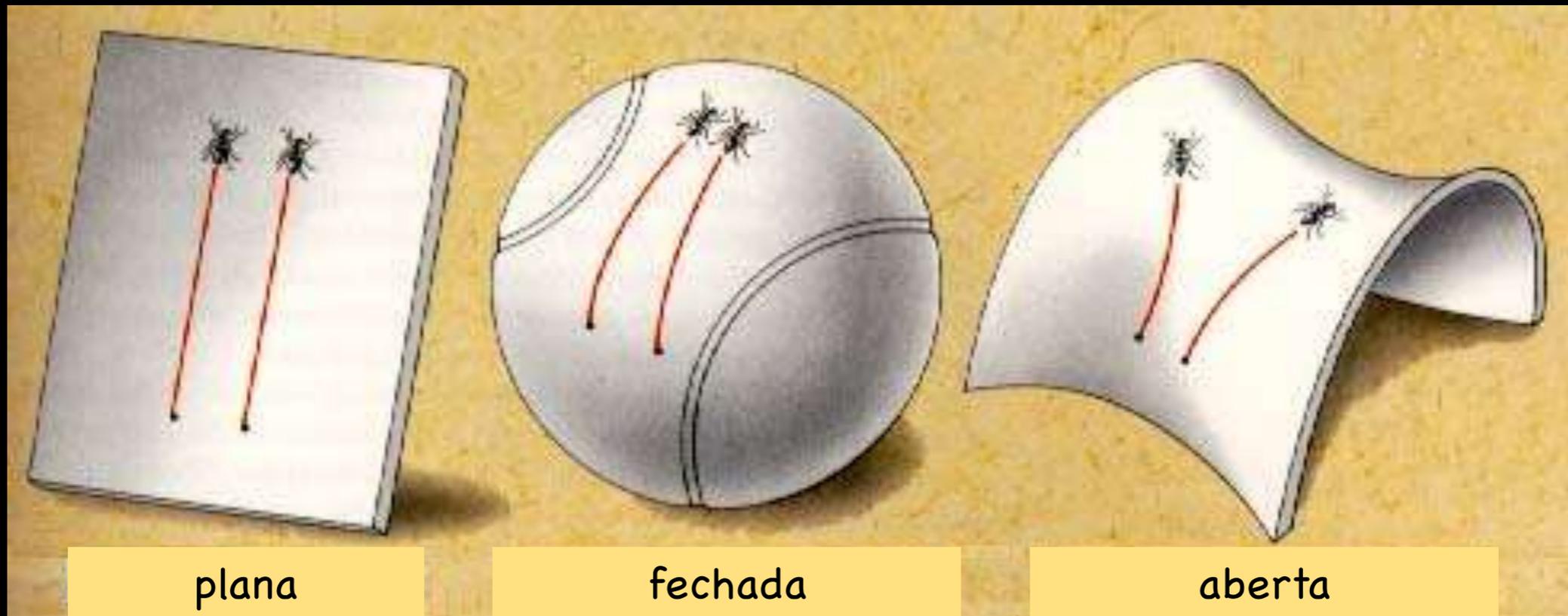
Teorema ultraparalelo:

dadas duas linhas paralelas (hipérboles), há uma única linha perpendicular a elas.

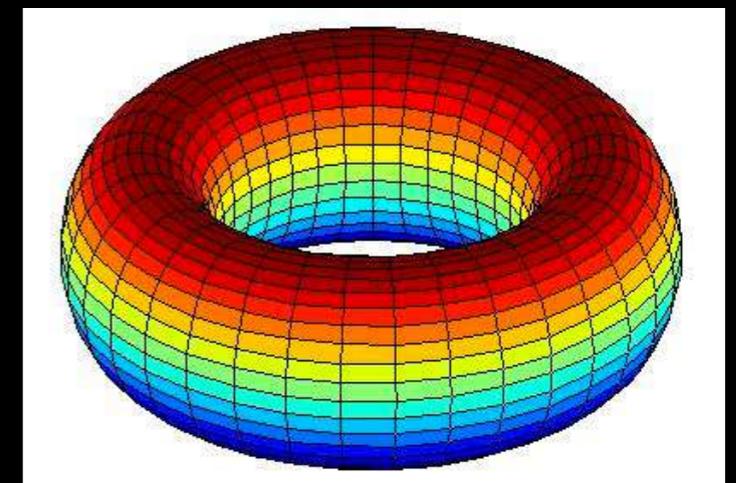


Física II - Relatividade Geral

Visão "global" das geometrias plana (curvatura nula), fechada (curvatura positiva) e aberta (curvatura negativa):



Um aspecto crucial dessas geometrias é que **todos os pontos** desses espaços são **equivalentes**. Ou seja, não há **nenhuma posição privilegiada**, nem **nenhuma direção privilegiada**. Isso não é necessariamente verdade em outras geometrias, p. ex.:



Física II - Relatividade Geral

Espaços planos (Euclidianos), fechados (i.e., esféricos) e abertos (GLB) são as únicas variedades que satisfazem um princípio simples: elas são homogêneas e isotrópicas.

Homogeneidade: o espaço tem as mesmas propriedades em todo lugar

Homogeneidade sem isotropia



Isotropia: todas as direções do espaço são equivalentes

Isotropia sem homogeneidade



Princípio cosmológico: o espaço é o mesmo em todo lugar, e em todas as direções

Física II - Relatividade Geral



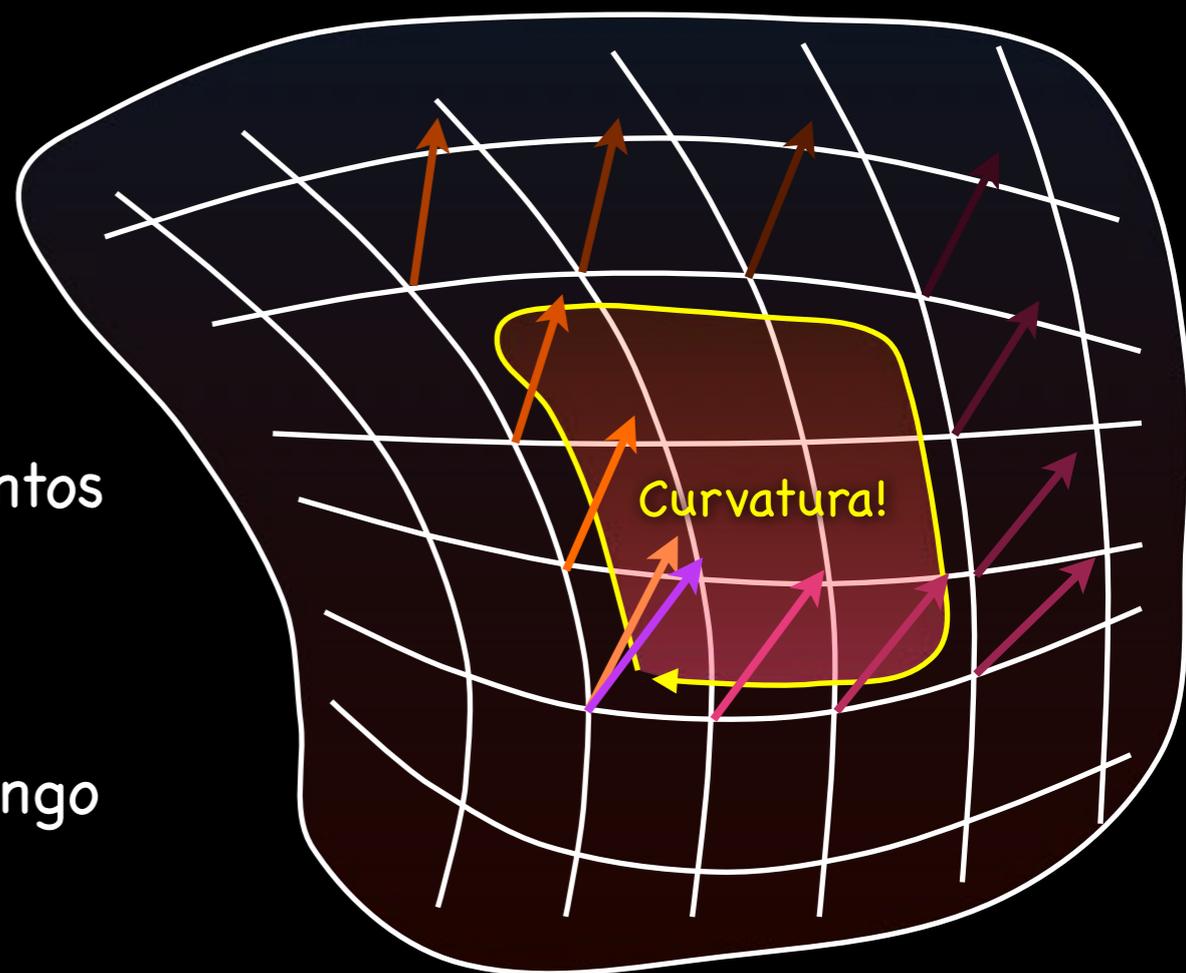
O espaço de Lobachevski foi uma das motivações para Georg B. Riemann, em 1854, propor sua visão global da Geometria como o estudo das variedades com qualquer número de dimensões, em qualquer tipo de espaço.

Essas geometrias são **essencialmente não-Euclidianas**: as distâncias entre dois pontos são dadas em termos de uma métrica, que é uma função diferenciável qualquer:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

A métrica tem um papel dual:

- i) ela serve para medir a distância entre dois pontos quaisquer; e
- ii) ela determina (pelas **conexões afins**) como se deve **transportar quantidades geométricas** ao longo de um caminho suave na variedade - p. ex.:



aceleração

$$\frac{dV_\mu}{d\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\nu}{d\lambda} V_\alpha$$

$$\Delta V_\mu = \frac{1}{2} R_{\beta\mu\nu}^\alpha V_\alpha \oint dx^\mu x^\nu$$

Física II - Relatividade Geral

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\beta}} \right)$$

$$\frac{DV^{\alpha}}{Dx^{\beta}} = V^{\alpha}_{;\beta} = \frac{\partial V^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} V^{\mu}$$

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\nu}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\mu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\beta\nu}^{\sigma}$$

$$\frac{DV_{\alpha}}{Dx^{\beta}} = V_{\alpha;\beta} = \frac{\partial V_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} V_{\mu}$$

A liberdade de escolha das coordenadas implica que, em qualquer ponto, podemos sempre usar o Elevador de Einstein, ir para um sistema no qual a métrica é, localmente, aquela de Minkowski, e assim fazer com que as conexões se anulem:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}, \quad \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \rightarrow 0$$

Entretanto, se o espaço é **curvo**, as **derivadas** das conexões não podem também se anular...

$$\partial_{\beta} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \neq 0 \quad !$$

Portanto, nunca podemos "anular" a curvatura!

Física II - Relatividade Geral

Agora, suponha que nos é dado um espaço com uma determinada métrica.

O que define um referencial em "queda livre" (inercial) em algum lugar desse espaço?

→ A **aceleração** em trajetórias que passam por aquele lugar deve **se anular**:

$$\frac{D^2 X^\alpha}{D\lambda^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda} = 0$$

Equação da geodésica

$X^\alpha(\lambda)$

Note que a equação da geodésica determina tanto as coordenadas **espaciais e temporais** do observador inercial

→ "Tempo próprio" é o $X^0 = \tau$ ao longo da geodésica!

Limite Newtoniano

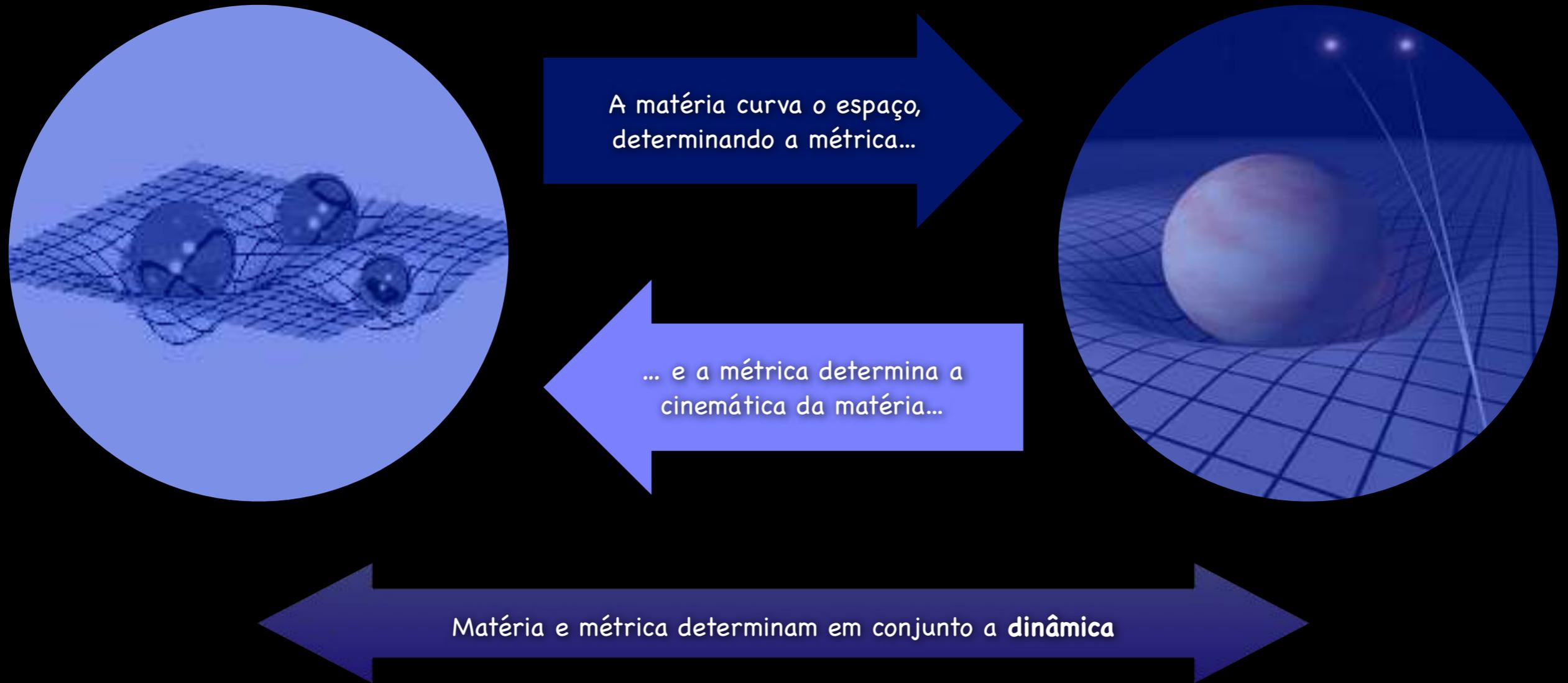
Pequenas velocidades... $\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\alpha \frac{dt}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0$

$$g_{00} = 1 - 2\phi$$

Métrica estática, quase Minkowski...

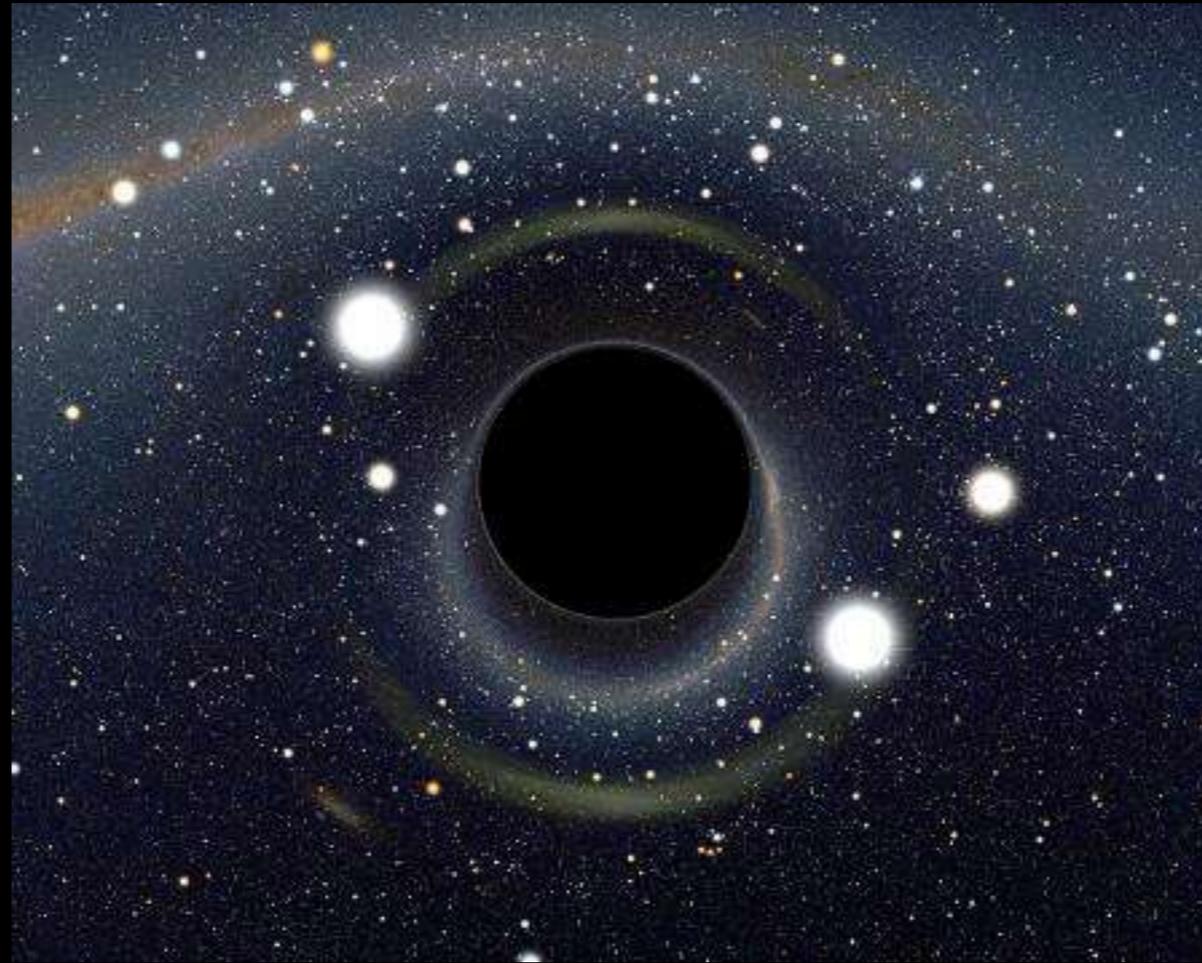
$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \rightarrow \Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla^i g_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \\ \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \end{cases}$$

Equações de Einstein



$$G_{\mu\nu}(\text{métrica}) = 8\pi G T_{\mu\nu}(\text{matéria})$$

Buracos negros



Leitura adicional sugerida (divulgação científica):

Kip S. Thorne, "Black holes and time warps: Einstein's outrageous legacy"

Isaac Asimov, "O colapso do universo"

Buracos negros

Segundo Newton, a aceleração da gravidade da Terra é: $g_1 = \frac{GM}{r_1^2} \simeq 10 \text{ m/s}^2$

É mais interessante calcular o potencial:

$$\phi_1 = \frac{GM}{r_1} \simeq (8,2 \times 10^3 \text{ m/s})^2$$

Agora imagine que toda a massa da Terra fosse compactada no tamanho de uma bolinha de gude.

Aí o potencial gravitacional na vizinhança da bolinha seria:

$$\phi_2 \simeq (2,8 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$



Buracos negros

Na Relatividade Geral, uma massa M "pontual" gera uma **métrica** do espaço-tempo conhecida como **Métrica de Schwarzschild (1916)**:



$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r c^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



$c=1$ (unidades "naturais")

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

O que acontece quando temos uma grande massa concentrada em um volume muito pequeno, menor que o **Raio de Schwarzschild**?

$$R_s = \frac{2GM}{c^2} \rightarrow 2GM$$

Física II - Relatividade Geral

Vamos primeiro examinar o que acontece com o **cone de luz futuro** no espaço-tempo de Schwarzschild.

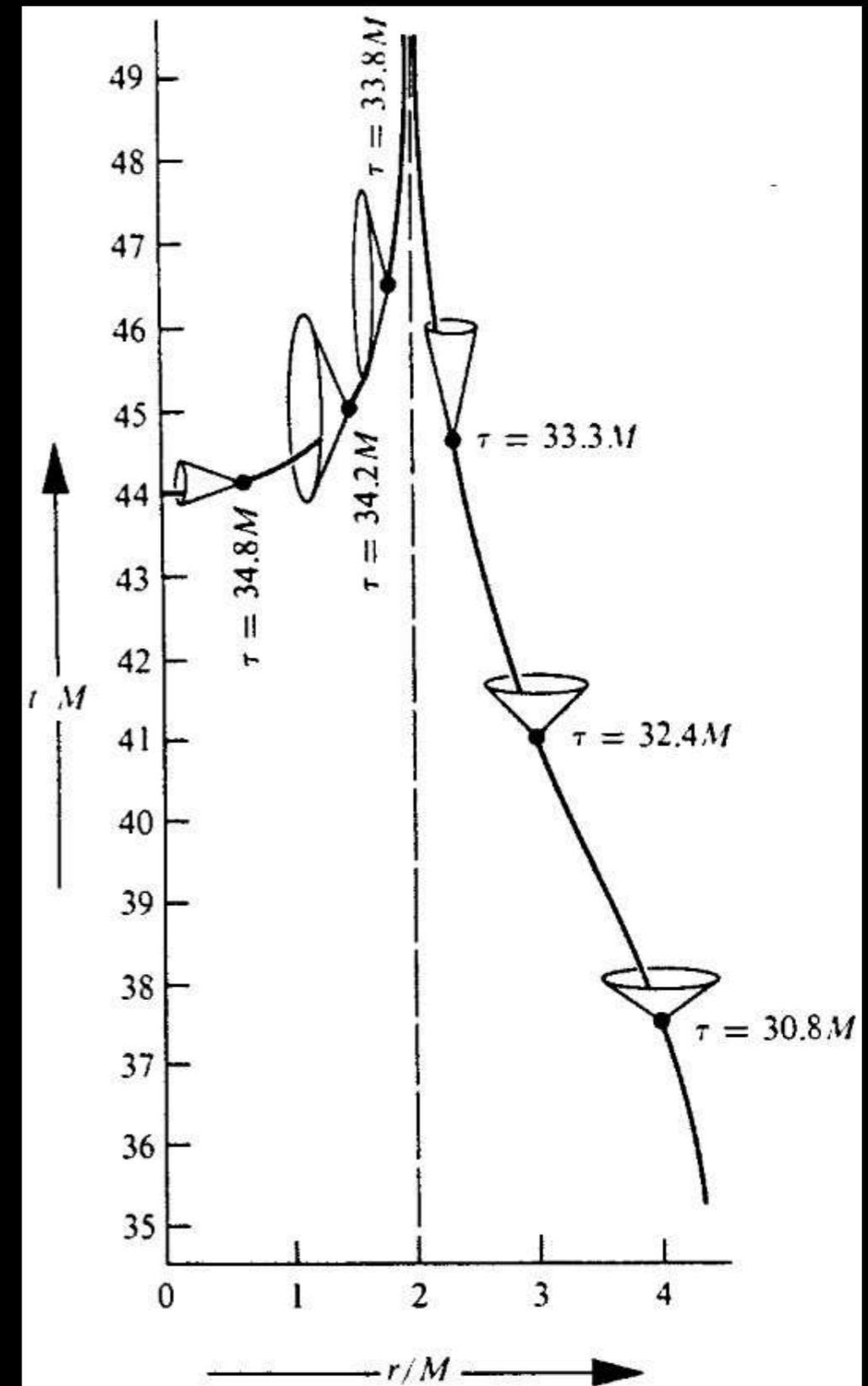
Fora do Raio de Schwarzschild, temos a situação usual: o cone de luz futuro aponta para... o futuro! (Ou seja, na direção de t crescendo.)

Porém, dentro do Raio de Schwarzschild o cone de luz futuro aponta na direção radial! Ou seja, o futuro de qualquer partícula, de qualquer corpo material, não importa as suas "particularidades", aponta para o ponto $r=0$ (onde está a massa M).

Em outras palavras: uma vez dentro do buraco negro, não há saída — nem para a luz!

No ponto $r=0$ a curvatura do espaço-tempo é infinita, e temos o que é conhecido como **singularidade**.

Linhas de mundo de trajetórias radiais

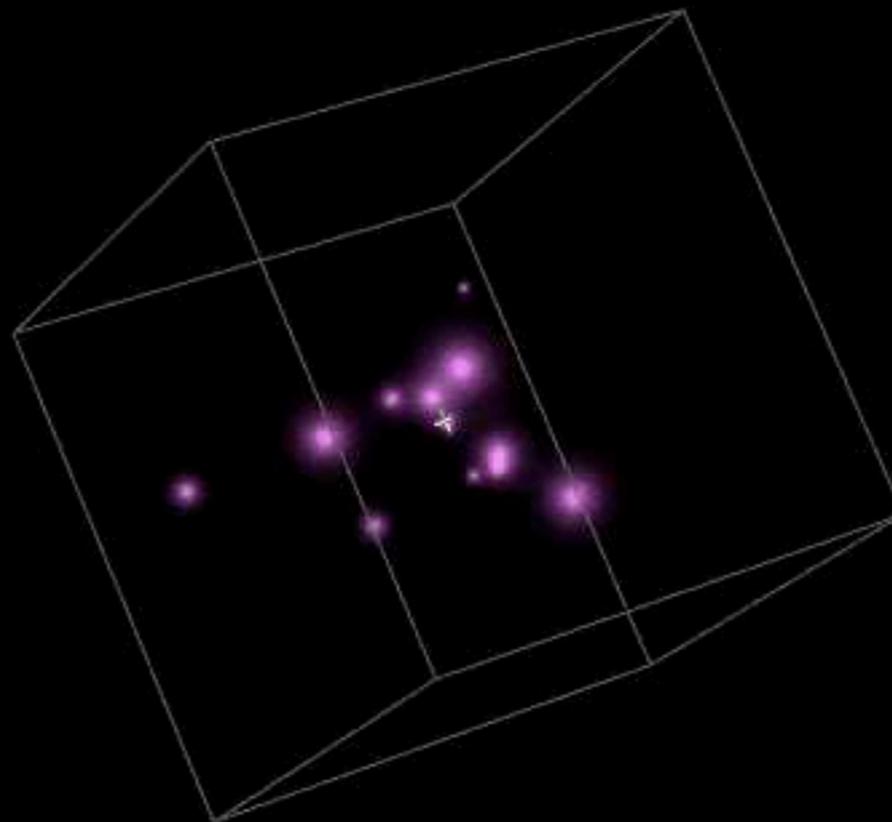


Buracos negros existem - e eles estão mais próximos do que você imagina!!!

$$M \simeq 4.1 \times 10^6 M_{\odot}$$

Year: 1995.0

The Acceleration of Stars Orbiting
the Milky Way's Central Black Hole



Data: Andrea Ghez, Jessica Lu (UCIA)

Visualization: Dinoj Surendran, Randy Landsberg,

Mark Subbarao (UChicago / Adler / KICP)

Física II - Relatividade Geral

Por sinal... PRÊMIO NOBEL DE FÍSICA DE 2020!!!



III. Niklas Elmehed. © Nobel Media.

Roger Penrose

Prize share: 1/2



III. Niklas Elmehed. © Nobel Media.

Reinhard Genzel

Prize share: 1/4



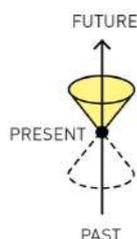
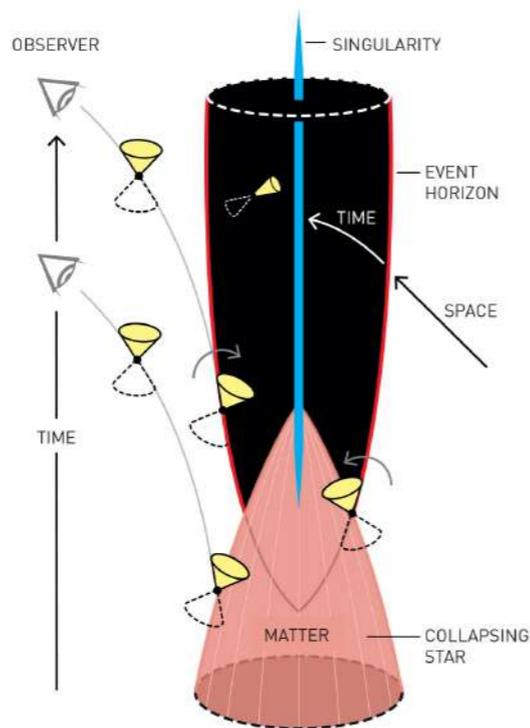
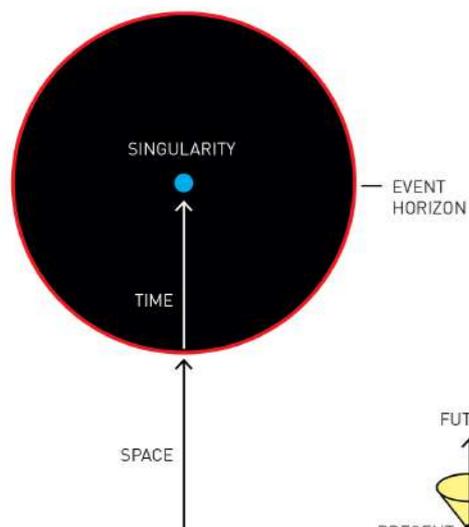
III. Niklas Elmehed. © Nobel Media.

Andrea Ghez

Prize share: 1/4

Cross section of a black hole

When a massive star collapses under its own gravity, it forms a black hole that is so heavy that it captures everything that passes its event horizon. Not even light can escape. At the event horizon, time replaces space and points only forward. The flow of time carries everything towards a singularity furthest inside the black hole, where density is infinite and time ends.



The light cone shows the paths of the light rays forward and backward in time. When matter collapses and forms a black hole, the light cones that cross the black hole's event horizon will turn inward, toward the singularity. An outside observer will never really see the light rays reach the event horizon, they just nudge it. No one can see further in.



Roger Penrose:

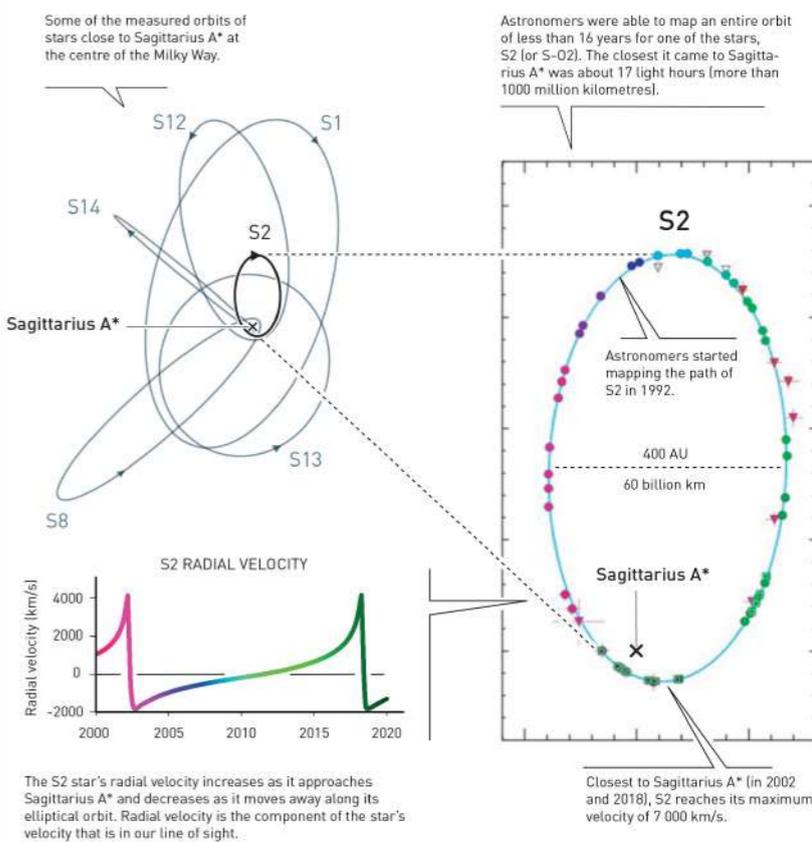
"For the discovery that black hole formation is a robust prediction of the general theory of relativity"

Reinhard Genzel & Andrea Ghez

"For the discovery of a supermassive black hole at the center of our galaxy"

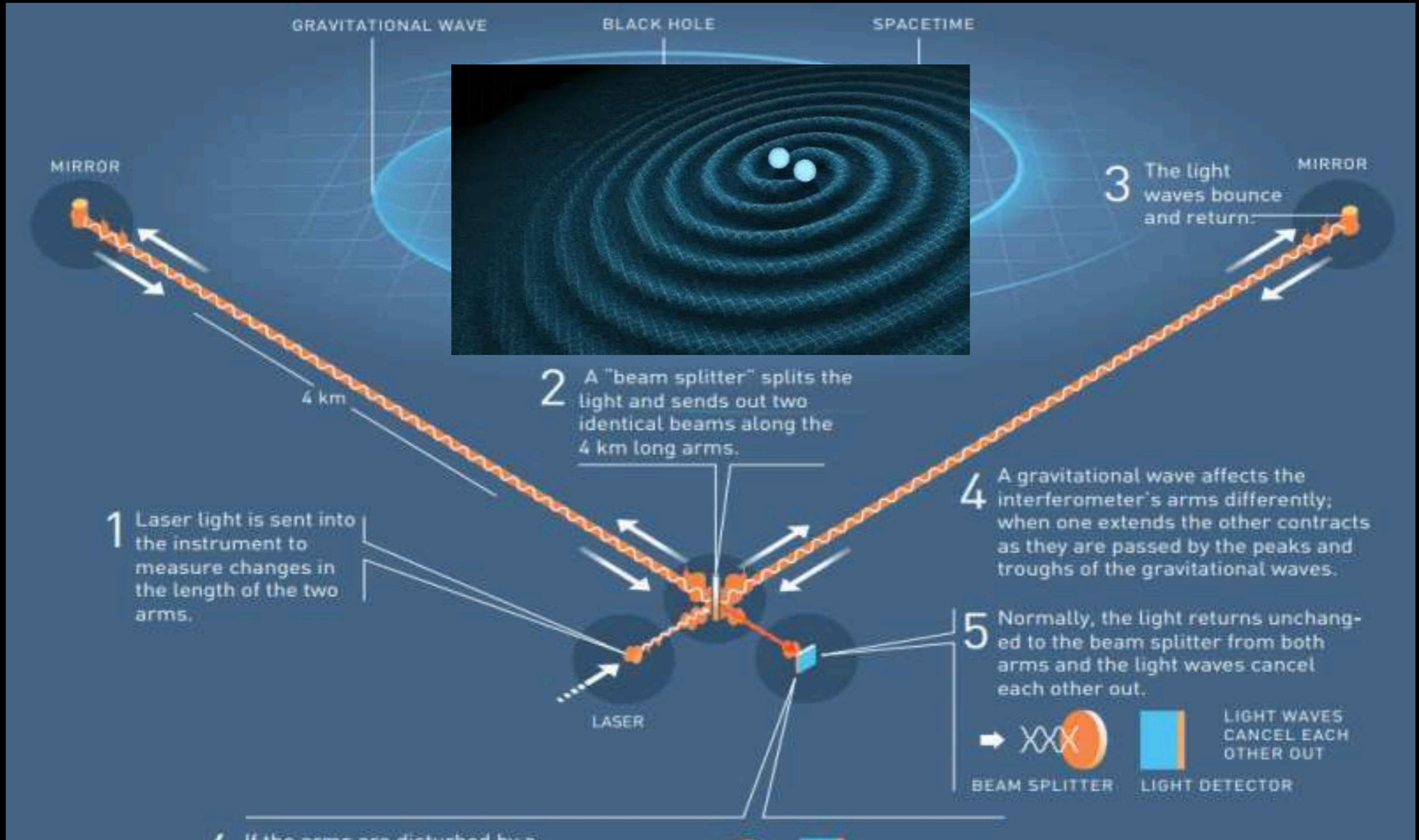
Stars closest to the centre of the Milky Way

The stars' orbits are the most convincing evidence yet that a supermassive black hole is hiding in Sagittarius A*. This black hole is estimated to weigh about 4 million solar masses, squeezed into a region no bigger than our solar system.



Física II - Relatividade Geral

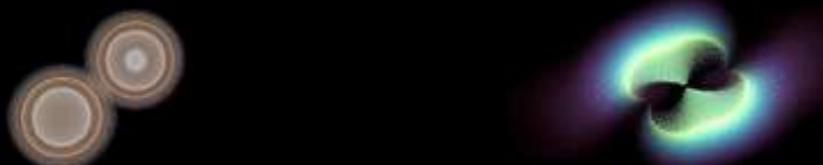
Buracos negros emitem sinais



If the arms are disturbed by a

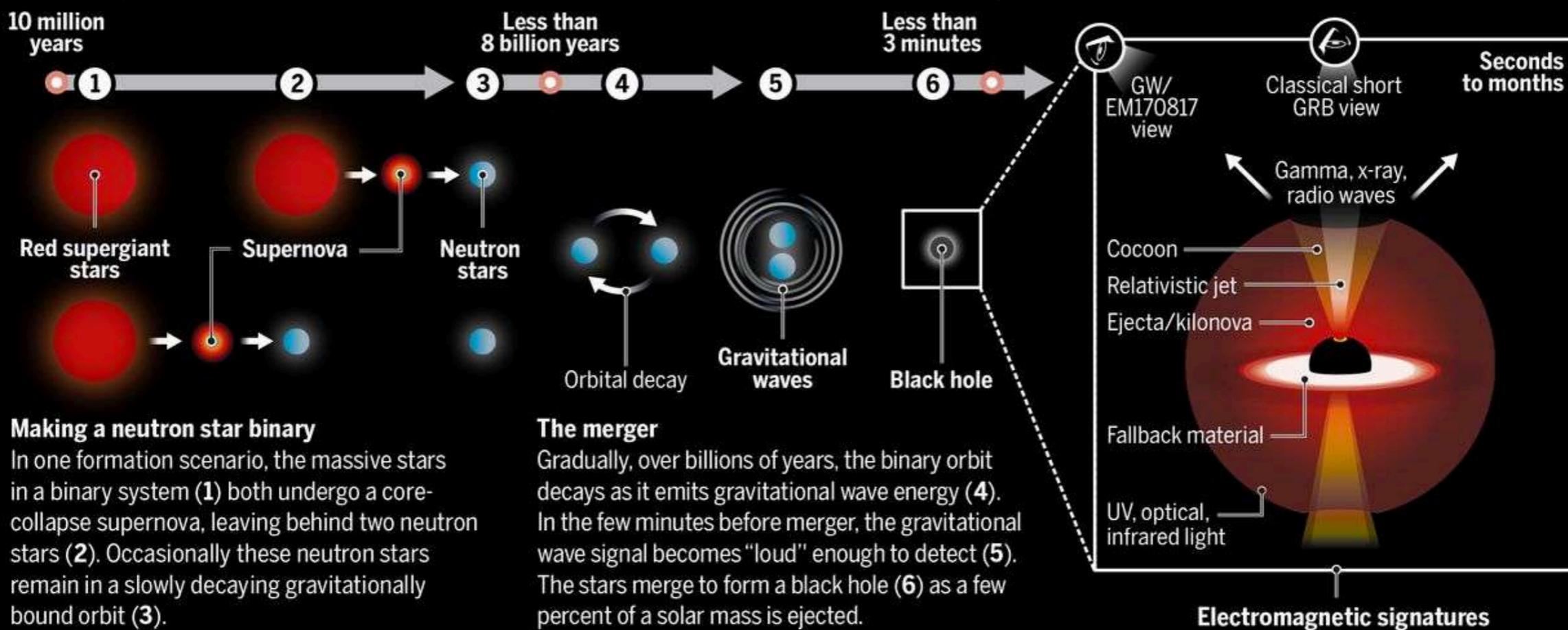
Física II - Relatividade Geral

Quase-buracos negros: estrelas de nêutrons



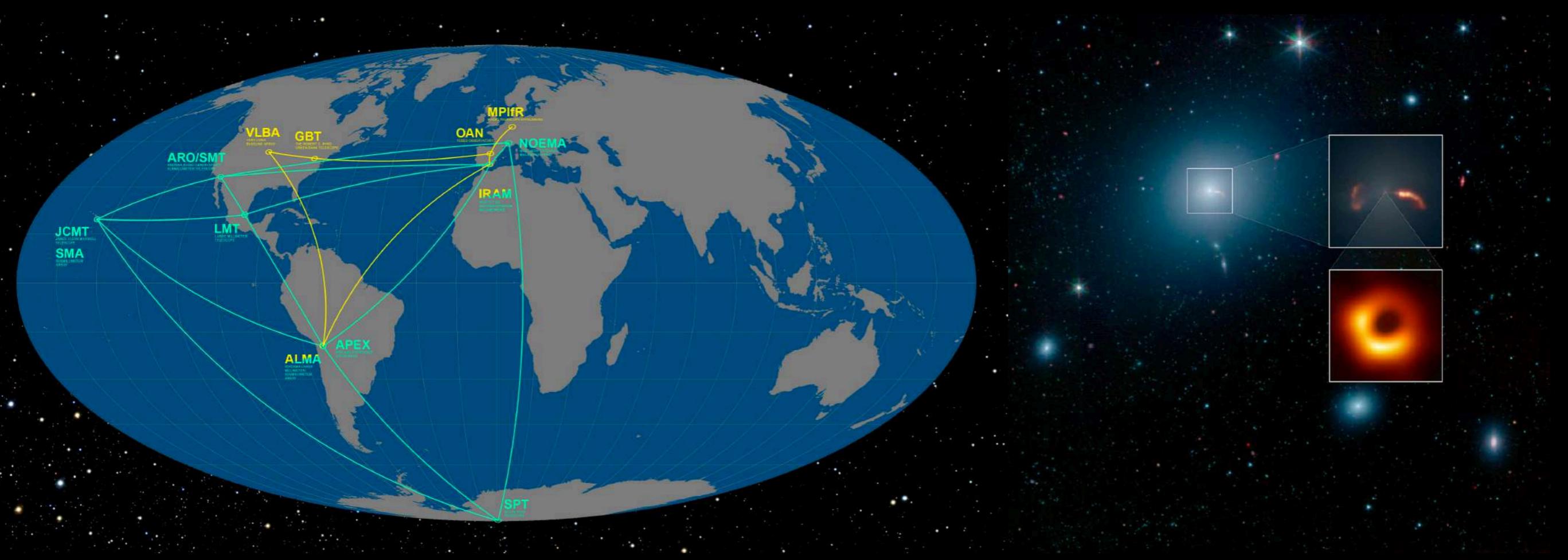
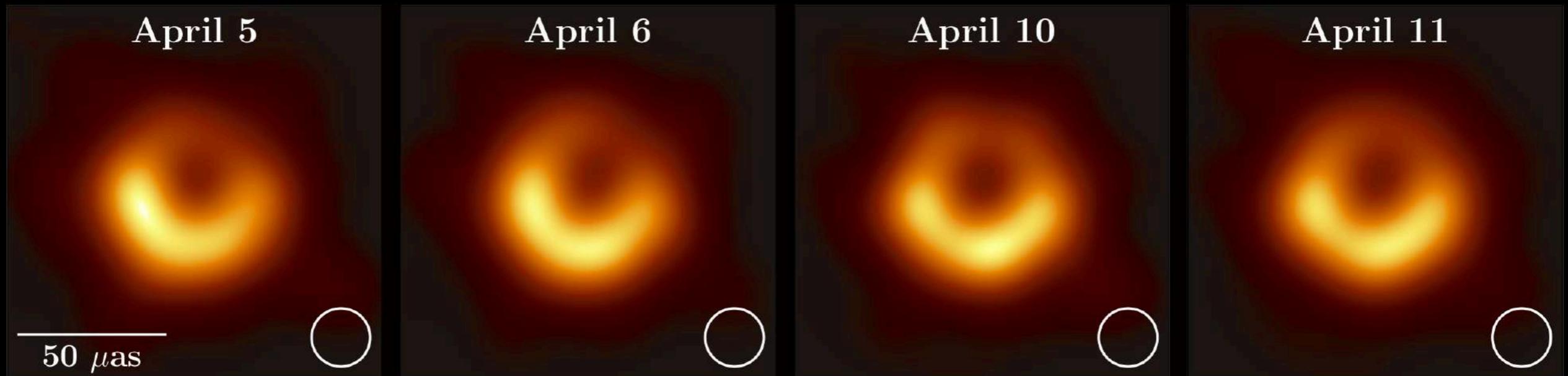
Stellar lives, brilliant death, and black hole birth

The August gravitational wave event from merging neutron stars, and associated panchromatic transient, were billions of years in the making. This figure follows a plausible formation channel, starting with two massive stars orbiting each other and ending with a black hole and the creation of many Earth-mass amounts of precious metals. The light comes from both the fast-expanding kilonova and the cocoon/jet breakout observed $\sim 30^\circ$ off axis.



Física II - Relatividade Geral

E finalmente, uma foto de um buraco negro!!!



Física II - Relatividade Geral

Fim